ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 10 FÉVRIER 1930.

PRÉSIDENCE DE M. LÉON LECORNU.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. **Émile Picard**, faisant hommage à l'Académie d'une brochure intitulée *Un coup d'œil sur l'histoire des sciences et des théories physiques*, s'exprime comme il suit :

Je dépose sur le bureau la lecture que j'ai faite à l'Académie dans sa dernière séance publique annuelle, éditée de nouveau avec ses soins habituels par la Librairie Gauthier-Villars.

En ces cent pages, j'ai cherché à tracer une esquisse du développement des sciences physico-mathématiques depuis l'Antiquité jusqu'à nos jours.

J'ai insisté quelque peu sur le rôle des théories physiques. On entend dire parfois qu'il y a aujourd'hui dans la science une crise de la réalité. En fait, de telles crises ont été fréquentes depuis les temps lointains où les sages d'Ionie trouvaient en se jouant les principes des choses. L'histoire des sciences montre la nécessité de compléter et de transformer sans cesse les théories physiques. Suivant le mot de Voltaire, celles-ci sont comme les souris; elles passent par neuf trous, mais sont arrêtées par le dixième. Il arrive toujours un moment où un fait nouveau oblige à quelque modification dans nos vues théoriques.

Il faut préciser aussi ce qu'on doit entendre par réalité scientifique. Quand serons-nous portés à attribuer une telle réalité à certains éléments qui se présentent dans les théories ? Ce sera quand, comme conséquences de celles-ci, des expériences variées auront amené à faire correspondre des nombres déterminés à ces éléments. Tel fut jadis l'éther de Huygens et de Fresnel; tels sont aujourd'hui l'*électron*, ou atome d'électricité négative, le *proton* ou atome d'électricité positive, et le quantum de lumière ou *photon*. C'est au

fond la doctrine pythagoricienne, débarrassée d'ailleurs de tout sens mystique, proclamant que toute chose accessible à notre connaissance possède un nombre, et que sans celui-ci nous ne pouvons rien comprendre ni connaître.

On voit généralement aujourd'hui dans une théorie physique un moule, analytique ou géométrique, utile et fécond pour une représentation provisoire des phénomènes, et l'accord d'une théorie avec l'expérience ne nous paraît plus démontrer qu'elle exprime la réalité profonde des choses. Est-il toujours vrai de dire qu'une théorie garde quelque chose de celle qu'elle remplace? Au point de vue cosmologique, l'affirmation peut être inexacte; c'est plutôt une forme mathématique, qui reste souvent utilisable. Aussi dans les théories les plus modernes de la physique, le monde nous apparaît-il parfois comme un vaste réseau de symboles mathématiques.

Quoi qu'il en soit de questions côtoyant l'ordre ontologique, aucun découragement ne doit résulter du fait que l'histoire des sciences nous montre tant de systèmes abandonnés. Il faut tout au contraire s'émerveiller de ce que, avec des représentations lointaines et décolorées des choses, l'esprit humain ait pu débrouiller le chaos de tant de phénomènes, en dégageant de la connaissance scientifique des idées de beauté et d'utilité, qui représentent les deux points de vue sous lesquels nous apparaît la science, idées que Descartes, non moins soucieux de pratique que de théorie, ne séparait pas, quand il souhaitait pour la science « de nous rendre comme maîtres et possesseurs de la nature ». Nous revenons ainsi au propos de Montaigne, par lequel je commençais cette lecture : « C'est un grand ornement que la science, et un outil de merveilleux service. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la limitation des dérivées des polynomes.* Note [1] de M. **Serge Bernstein**.

1. *Soit* $P_n(z) = a_0 z^n + \ldots + a_n$ *un polynome quelconque, et soit*

$$H_l(z) = b_0 z^l + \ldots + b_l,$$

un polynome de degré $l \leq n$, *n'ayant pas de racines à l'extérieur de la circonférence* C *de rayon* 1 ; *si l'on a sur* C

$$(1) \qquad |P_n(z)| \leq |H_l(z)|,$$

---

[1] Séance du 20 janvier 1930.

on a également, quel que soit k,

(2) $$|P_n^{(k)}(z)| \leq |[z^{n-l} H_l(z)]^{(k)}|.$$

En effet, il suffira de considérer le cas où $n = l$, $k = 1$. Or, en posant $z = z_0 \frac{i-x}{i+x}$, où z_0 est un point de la circonférence C, on aura

(3) $$P_n(z) = \frac{A(x)}{(1+x^2)^n}, \qquad H_n(z) = \frac{B(x)}{(1+x^2)^n},$$

où le polynome $B(x)$ a toutes ses racines dans le demi-plan supérieur, et l'inégalité (1) devient

$$|A(x)| \leq |B(x)|,$$

pour toutes les valeurs réelles de x. Donc, en vertu d'une proposition connue, on aura aussi

$$|A'(x)| \leq |B'(x)|$$

sur tout l'axe réel. Par conséquent, en utilisant les égalités (3) on obtient, après quelques réductions immédiates,

$$|zP'_n(z) - inxP_n(z)| \leq |zH'_n(z) - inxH_n(z)|;$$

d'où il vient, en posant $x = 0$,

$$|P'_n(z_0)| \leq |H'_n(z_0)|.$$

2. En appliquant l'inégalité (2) aux suites trigonométriques, on a la proposition suivante : *Si une suite trigonométrique* $S_n(\theta)$ *d'ordre* $n \geq l$ *satisfait à l'inégalité*

(4) $$|S_n(\theta)| \leq |H_l(e^{i\theta})|,$$

pour toute valeur réelle de θ, *on a aussi*

(5) $$|S'_n(\theta)| \leq |(n-l) H_l(e^{i\theta}) + e^{i\theta} H'_l(e^{i\theta})|.$$

et en général,

(6) $$|S_n^{(k)}(\theta)| \leq |[e^{i(n-l)\theta} H_l(e^{i\theta})]^{(k)}|.$$

De (4) nous pouvons tirer l'inégalité correspondante pour les polynomes sur le segment $(-1, +1)$; *si l'on a sur ce segment*

(7) $$|P_n(x)| \leq \sqrt{M^2(x) + (1-x^2) N^2(x)},$$

où $M(x)$ *et* $N(x)$ *sont deux polynomes réels de degrés* l *et* $l-1$, *respecti-*

vement, tels que $M(x) > 0$ *et* $N(x) > 0$ *pour* $x > 1$, *et ayant toutes leurs racines sur* $(-1, +1)$ *mutuellement séparées, on a sur le même segment l'inégalité*

$$(8)\quad |P'_n(x)\sqrt{1-x^2}| \leq \sqrt{[(n-l)M(x)+xN(x)+(x^2-1)N'(x)]^2+(1-x^2)[(n-l)N(x)+M'(x)]^2}$$

(qui se réduit pour $l=0$ à une inégalité connue).

Il en résulte que, $t(x)>0$ *étant une fonction continue quelconque, l'inégalité*

$$(9)\quad |P_n(x)| \leq t(x)$$

sur $(-1, +1)$ *entraîne*

$$(10)\quad |P'_n(x)\sqrt{1-x^2}| \leq n\,t(x)(1+\varepsilon_n),$$

où ε_n *tend uniformément vers zéro avec* $\frac{1}{n}$ *sur le segment* $(-1, +1)$.

D'ailleurs il est possible de montrer que l'inégalité (9) entraîne même que

$$(11)\quad |n P_n(x) + i P'_n(x)\sqrt{1-x^2}| \leq n\,t(x)(1+\varepsilon_n);$$

en particulier, lorsque $t(x)$ est constant, on a identiquement $\varepsilon_n = 0$.

3. La détermination du module maximum des dérivées successives aux extrémités ± 1, si l'inégalité (7) est remplie sur tout le segment $(1, +1)$, est une conséquence facile des développements de ma dernière Note. On obtient, en effet,

$$(12)\quad |P'_n(1)| \leq (n-l)^2 M(1) + M'(1) + 2(n-l)N(1),$$

et, en général, quel que soit k,

$$(13)\quad |P_n^{(k)}(1)| \leq [T_{n-l}(1)M(1)]^{(k)} + \frac{2k}{n-l}\left[[T'_{n-l}(1)N(1)]^{(k-1)} + \frac{k-1}{2}[T'_{n-l}(1)N(1)]^{(k-2)}\right],$$

où $T_n(x) = \cos n \arccos x$.

Donc, *en supposant remplie l'inégalité* (9), *où* $t(x)$ *est une fonction continue positive donnée quelconque, on aura*

$$(14)\quad |P_n^{(k)}(\pm 1)| \leq \frac{n^2(n^2-1)\ldots[n^2-(k-1)^2]}{1.3\ldots 2k-1}\,t(\pm 1)(1+\varepsilon),$$

où ε *tend vers zéro avec* $\frac{k}{n}$.

Il est aisé de montrer que *la plus grande des deux valeurs du second membre de* (14) *sert aussi asymptotiquement de limite supérieure* M *de* $|P_n^{(k)}(x)|$ *pour tout le segment* $(-1, +1)$, *pourvu que* $\frac{k^2}{n}$ *tende vers zéro*. Le fait curieux, à première vue, que la valeur M ne dépend que de $t(\pm 1)$ ne présente rien d'inattendu, si l'on se rend compte que l'ordre (par rapport à n) de croissance maxima des dérivées en des points fixes à l'intérieur du segment est inférieur à celui des extrémités.

ÉLASTICITÉ. — *La propagation des ondes sur les surfaces élastiques à six paramètres*. Note de M. **Louis Roy**.

L'équation fondamentale des ondes de choc, que nous avons dernièrement établie pour les surfaces élastiques à six paramètres ([1]), permet de traiter aisément le problème de la propagation des ondes. Supposons déjà la surface affectée de viscosité. L'équation devant être vérifiée quels que soient $\delta(u, v, \ldots, \omega_w)$ le long de la courbe C, image de l'onde dans le plan $\omega O \omega_1$, doit l'être, en particulier, lorsque ces six variations sont nulles le long de C et par suite leurs dérivées tangentielles $\frac{\partial}{\partial l}$; il ne subsiste plus alors dans l'équation que les termes relatifs aux dérivées normales, ce qui exige qu'on ait tout le long de C, en supposant $\mathcal{V} \neq 0$,

$$\mathrm{a}\mathcal{F} + \mathrm{b}\mathcal{F}_1 = 0, \qquad \mathrm{a}\mathcal{G} + \mathrm{b}\mathcal{G}_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{a}\mathcal{R} + \mathrm{b}\mathcal{R}_1 = 0.$$

On a ainsi, d'après les égalités (1) de notre précédente Note, un système de six équations linéaires et homogènes en $\delta'(\xi, \eta, \ldots, r)$, dont le déterminant est en général différent de zéro, ce qui exige que ces six variations soient nulles et, par suite, toutes les autres discontinuités. De là ce premier résultat :

Une surface élastique à six paramètres ne peut être le siège d'aucune onde de choc qui se propage.

Supposons maintenant la surface dénuée de viscosité; l'équation fondamentale se réduit à

$$\int \left| \left(\rho \frac{\mathcal{V}^2}{\mathrm{a}} \delta'\xi + \mathrm{a}\,\delta'\mathcal{R}_u + \mathrm{b}\,\delta'\mathcal{R}_{1u}\right) \delta u \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\mathcal{V}^2}{\mathrm{a}}(\mathrm{A}\,\delta'p - \mathrm{F}\,\delta'q - \mathrm{E}\,\delta'r) + \mathrm{a}\,\delta'\mathcal{C}_u + \mathrm{b}\,\delta'\mathcal{C}_{1u}\right] \delta\omega_u \right| dl = 0,$$

([1]) L. Roy, *L'équation fondamentale des ondes de choc sur les surfaces élastiques* (*Comptes rendus*, **190**, 1930, p. 240).

et, comme elle doit être vérifiée quels que soient $\delta(u, v, \ldots, \omega_w)$, cela exige qu'on ait tout le long de C :

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\rho \frac{\mathcal{V}^2}{a} \delta' \xi + a\, \delta' \mathcal{R}_u + b\, \delta' \mathcal{R}_{1u} = 0, \\
&\rho \frac{\mathcal{V}^2}{a} \delta' \eta + a\, \delta' \mathcal{R}_v + b\, \delta' \mathcal{R}_{1v} = 0, \\
&\rho \frac{\mathcal{V}^2}{a} \delta' \zeta + a\, \delta' \mathcal{R}_w + b\, \delta' \mathcal{R}_{1w} = 0; \\
&\frac{\mathcal{V}^2}{a} (\quad A\, \delta' p - F\, \delta' q - E\, \delta' r) + a\, \delta' \mathcal{C}_u + b\, \delta' \mathcal{C}_{1u} = 0, \\
&\frac{\mathcal{V}^2}{a} (- F\, \delta' p + B\, \delta' q - D\, \delta' r) + a\, \delta' \mathcal{C}_v + b\, \delta' \mathcal{C}_{1v} = 0, \\
&\frac{\mathcal{V}^2}{a} (- E\, \delta' p - D\, \delta' q + C\, \delta' r) + a\, \delta' \mathcal{C}_w + b\, \delta' \mathcal{C}_{1w} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

les composantes $\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v, \ldots, \mathcal{C}_{1w}$ se réduisant maintenant à

$$
(2) \qquad \mathcal{R}_u = - f'_{\xi}, \quad \mathcal{R}_v = - f'_{\eta}, \quad \ldots, \quad \mathcal{C}_{1w} = - f'_{r_1},
$$

où f désigne le potentiel thermodynamique interne par unité d'aire comptée sur l'état primitif.

Comme les douze déformations $\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \ldots, r_1 - r_{10}$ sont supposées très petites, il en est de même de leurs variations $\delta'(\xi, \eta, \ldots, r_1)$ à la traversée de l'onde ; de sorte que, si nous supposons la variation correspondante $\delta' T$ de la température absolue également très petite, nous pouvons calculer les variations $\delta'(\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v, \ldots, \mathcal{C}_{1w})$ par une simple différentiation des expressions (2), soit

$$
(3) \qquad \delta' \mathcal{R}_u = - (f''_{\xi^2}\, \delta' \xi + f''_{\xi\eta}\, \delta' \eta + \ldots + f''_{\xi r_1}\, \delta' r_1 + f''_{\xi T}\, \delta' T), \ldots,
$$

formules où les dérivées peuvent être indifféremment prises dans l'une ou l'autre région sur le bord de l'onde, puisque les discontinuités sont très petites. Nous avons alors deux cas à distinguer.

I. *La surface est bonne conductrice de la chaleur.* — Dans ces conditions $\delta' T$ est nul, de sorte que si l'on pose pour abréger

$$
\Phi_{uv} = a^2 f''_{uv} + ab (f''_{uv_1} + f''_{u_1 u}) + b^2 f''_{u_1 v_1},
$$

les équations (1) deviennent, d'après (3) et les formules (1) de notre précédente Note,

$$
\begin{aligned}
&(\Phi_{\xi^2} - \rho \mathcal{V}^2)\, \delta' \xi + \Phi_{\xi\eta}\, \delta' \eta + \ldots + \Phi_{\xi r}\, \delta' r = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Phi_{r\xi}\, \delta' \xi + \Phi_{r\eta}\, \delta' \eta + \ldots + (\Phi_{r^2} - \mathcal{C} \mathcal{V}^2)\, \delta' r = 0.
\end{aligned}
$$

Pour que les discontinuités ne soient pas toutes nulles, il faut et il suffit que le déterminant de ces six équations linéaires et homogènes le soit, ce qui donne une équation du sixième degré en $\mathfrak{V}^2$. Cinq de ces équations déterminent ensuite, pour chaque valeur de $\mathfrak{V}$, les diverses discontinuités en fonction d'un même paramètre arbitraire.

II. *La surface est mauvaise conductrice de la chaleur.* — Dans ces conditions et en supposant $\mathfrak{V} \neq 0$, on reconnaît qu'on a

$$\delta' \mathrm{T} = \frac{\mathrm{T}}{c\mathfrak{E}} (f''_{\mathrm{T}\xi} \delta'\xi + f''_{\mathrm{T}\eta} \delta'\eta + \ldots + f''_{\mathrm{T}r_1} \delta' r_1),$$

c désignant la capacité calorifique par unité de surface primitive, $\mathfrak{E}$ l'équivalent mécanique de la chaleur; de sorte que si l'on pose pour abréger

$$\Psi_u = \mathrm{a} f''_{\mathrm{T}u} + \mathrm{b} f''_{\mathrm{T}u_1},$$

les équations (1) deviennent

$$\left(\Phi_{\xi^2} + \frac{\mathrm{T}}{c\mathfrak{E}} \Psi_\xi^2 - \rho \mathfrak{V}^2\right) \delta'\xi + \ldots + \left(\Phi_{\xi r} + \frac{\mathrm{T}}{c\mathfrak{E}} \Psi_\xi \Psi_r\right) \delta' r = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\Phi_{r\xi} + \frac{\mathrm{T}}{c\mathfrak{E}} \Psi_r \Psi_\xi\right) \delta'\xi + \ldots + \left(\Phi_{r^2} + \frac{\mathrm{T}}{c\mathfrak{E}} \Psi_r^2 - \mathrm{C} \mathfrak{V}^2\right) \delta' r = 0,$$

et le calcul s'achève comme précédemment. On reconnaît ensuite que les conclusions précédentes, en particulier les deux équations aux vitesses de propagation, restent valables pour des ondes d'un ordre quelconque.

Remarquons enfin que tous ces résultats sont analogues à ceux que nous avons antérieurement obtenus pour la ligne élastique [1].

M. J. Costantin fait hommage à l'Académie de deux opuscules qu'il vient de publier : l'un intitulé *Biologie culturale et pathologique de l'*Hevea brasiliensis *en Indochine*, l'autre intitulé *Influence de la culture sur les plantes à mycorhizes* (ce dernier avec la collaboration de M. Magrou, Mlle Jandel et M. Lebard).

---

(1) L. Roy, *La propagation des ondes sur la ligne élastique à six paramètres* (*Comptes rendus*, **182**, 1926, p. 569); *Sur les équations générales des lignes élastiques et la propagation des ondes* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, **18**, 1926, p. 159).

Dans le premier il s'agit d'une des entreprises les mieux réussies de la colonisation française.

Dans le second, d'investigations faites dans les jardins alpins du Petit Saint-Bernard, du Lautaret et de la rocaille alpine du Muséum.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° Bureau Veritas. *Conditions techniques pour le matériel non destiné aux Constructions navales*, 1929. III. (Présenté par M. L. Guillet.)

2° Émile Forgue et Antoine Basset. *La Rachianesthésie. Sa valeur et sa place actuelle dans la pratique.* (Présenté par M. P. Bazy.)

GÉOMÉTRIE. — *Configurations.* Note de M. **Bertrand Gambier**.

1. Appelons *configuration* un ensemble de n individus mathématiques dont chacun a la même définition et possède, par rapport à p autres de cet ensemble, une même propriété; cette définition très générale s'applique aussi bien à l'analyse qu'à la géométrie : racines des équations abéliennes par exemple, ou points d'inflexion des cubiques planes, ou points d'intersection de deux courbes algébriques.

Le nombre d'individus peut devenir infini; on peut encore considérer une réunion de deux ou plusieurs configurations telles que chaque individu de l'une soit lié par une propriété déterminée à chaque individu de l'autre : par exemple les génératrices des deux systèmes d'une même quadrique. La recherche des configurations est l'un des problèmes où le dénombrement des inconnues et des équations peut conduire à bien des déceptions et qui nécessite le concours de la théorie des groupes et des invariants.

2. Je vais prendre un exemple particulièrement simple : cherchons n droites dont chacune coupe p autres. Le nombre des intersections est $\frac{np}{2}$ de sorte que np est pair; on a $4n$ inconnues liées par $\frac{pn}{2}$ relations; tenant compte du fait que l'homographie générale respecte la définition de cette

configuration, on pourrait croire nécessaire de se borner au cas

$$n\left(4-\frac{p}{2}\right)\geq 15;$$

pour n impair, le maximum de p serait donc $p=6$, n devant être au moins égal à 15; pour n pair, le maximum de p serait $p=7$, n devant être au moins égal à 30. Il est aisé de voir que ces limitations sont inexistantes : imaginons en effet que par une méthode quelconque nous ayons obtenu une telle configuration (n, p) de droites; la transformation de Sophus Lie remplace cette configuration par n sphères dont chacune touche p autres, c'est-à-dire coupe p autres suivant deux génératrices isotropes; on trouve donc un total de pn droites isotropes dont chacune rencontre $2p-1$ autres; une transformation homographique ayant pour but de remplacer la conique ombilicale par une conique différente donne donc pn droites (rencontrant une même conique) dont chacune coupe $2p-1$ autres; c'est une configuration de même définition que primitivement, mais n et p ont été respectivement remplacés par pn et $2p-1$, nombres supérieurs, car le cas $p=1$ n'est pas intéressant.

La transformation homographique intermédiaire peut d'ailleurs être remplacée par une transformation dualistique, de façon à avoir pn droites, qui ne sont plus isotropes, mais touchent un même cône de degré 2. On peut maintenant recommencer sur la seconde configuration l'opération en double partie qui a été faite sur la première (avec une transformation homographique ou dualistique différente), et ainsi de suite; h opérations conduisent à $p(2p-1)(4p-3)\ldots(2^{h-1}p-2^{h-1}+1)n$ droites dont chacune coupe $(2^h p-2^h+1)$ droites de la configuration; ces droites rencontrent toutes une même conique ou sont tangentes à un même cône de degré 2; le nombre de paramètres arbitraires augmente aussi à chaque opération. Il reste à indiquer une configuration initiale : on peut prendre $2n$ génératrices d'une quadrique (n dans chaque système); on peut prendre 4 boulets sphériques égaux, disposés de façon que chacun touche les trois autres; ici on peut poursuivre l'opération dans le sens indiqué; mais on ne peut revenir en arrière, c'est-à-dire remplacer les quatre sphères par quatre droites dont chacune coupe les trois autres; cela tient à ce que, en réalité, la transformation de Sophus Lie fait correspondre à une droite une sphère *orientée*, mais remplace une sphère non orientée par *deux* droites; on peut prendre les 27 droites d'une surface cubique non réglée : chacune rencontre 10 autres.

Ce dernier exemple prouve même qu'au fond le problème posé revient à déterminer parmi les surfaces non réglées, algébriques, de degré donné arbitraire, celles qui possèdent des droites concourantes. Il semble assez difficile de décider, en suivant strictement la méthode précédente, le nombre de droites (ou sphères) réelles. Au lieu de prendre la transformation précise de Sophus Lie, définie par exemple par les équations

$$x - iy + x'z - z' = 0, \quad x'(x + iy) - z - y' = 0,$$

de sorte qu'à une droite de l'espace (x', y', z') correspond une sphère de l'espace (x, y, z), nous pouvons employer la transformation de contact définie par le couple d'équations

$$x - y + x'z - z' = 0, \quad x'(x + y) - z - y = 0,$$

de sorte qu'à une droite de l'espace (x', y', z') correspond cette fois un hyperboloïde de révolution à une nappe de l'espace (x, y, z), les génératrices faisant avec Oy l'angle $\frac{\pi}{4}$; dans ce cas des droites réelles sécantes fournissent des hyperboloïdes réels se coupant suivant deux droites réelles de sorte que l'opération en partie double expliquée plus haut donne constamment soit des droites réelles, soit des quadriques réelles pour toute configuration réelle initiale; en particulier on sait qu'il existe des surfaces cubiques possédant 27 droites réelles et distinctes.

3. On rapprochera avec intérêt ces propriétés d'une belle proposition due à M. Tzitzéica [1] : *Considérons une droite* ω, *puis cinq droites* A_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ *coupant* ω; *on suppose que la seconde sécante commune à* A_1, A_2, A_3, A_4 *ne rencontre pas* A_5; *nous appelons* A'_i *la seconde sécante commune aux* A_j $(j \neq i)$: *les cinq droites* A'_i *rencontrent une même droite* ω'. Il résulte d'un échange de vues entre M. Tzitzéica et M. Montel que la démonstration est immédiate en remarquant que la condition nécessaire et suffisante pour que cinq droites soient sur une même surface cubique est ou que deux se rencontrent ou qu'elles aient une même sécante commune. On voit immédiatement que les douze droites mises en jeu sont sur une même surface cubique.

---

(1) *Bulletin de Mathématiques et Physique de l'École Polytechnique de Bucarest*, I, 1929, p. 17-21.

GÉOMÉTRIE. — *Sur les représentations des cercles.*
Note (¹) de M. **Paul Delens**, présentée par M. Hadamard.

1. Je me propose de montrer ici que les principes de représentation des imaginaires de Laguerre (²) et Darboux permettent la synthèse et l'extension des procédés récents d'étude des cercles de l'espace (³); je m'en tiendrai aux cercles réels.

L'opération $\mathcal{L}$ *associe* à un cercle ses deux foyers, à un cycle l'un des foyers ou une succession des foyers (sans insister davantage sur les règles connues d'orientation); $\mathcal{L}_\varpi$ est l'opération plane qui à deux points (ou un segment) d'un plan ϖ fait correspondre les points *associés*, $\mathcal{L}_\sigma$ l'opération analogue sur une sphère σ.

I. *Par projection orthogonale $\mathcal{P}$ sur un plan ϖ d'un cercle et de ses foyers, on obtient une ellipse et ses foyers imaginaires* (Laguerre).

II. *Par projection géodésique $\mathcal{S}$ sur une sphère σ d'un cercle et de ses foyers, on obtient une conique sphérique et deux paires (diamétralement opposées) de ses foyers imaginaires.*

Les foyers imaginaires en jeu sont associés des foyers réels; les opérations $\mathcal{L}^{-1}$, $\mathcal{L}_\varpi^{-1}$, $\mathcal{L}_\sigma^{-1}$ ramènent aux cercles ou aux foyers réels. Nous appellerons *fausses projections* les opérations $\mathcal{P}' = \mathcal{L}\mathcal{P}\mathcal{L}^{-1}$, $\mathcal{P}'_\varpi = \mathcal{L}\mathcal{P}\mathcal{L}_\varpi^{-1}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}'_\sigma$.

Les énoncés précédents sont encore relatifs à deux focales imaginaires du cylindre ou du cône projetant : les focales réelles associées, *fausses projetantes*, sont, au sens de M. Robert, deux droites focales du cercle projeté; leur construction directe permet de rester dans le domaine réel, d'où l'intérêt des méthodes de cet auteur.

2. Appliquons le principe I à la représentation plane d'une congruence paratactique (P). Soient $\Delta(y = ix,\ z = i\mathrm{R})$ et $\bar{\Delta}$ les bases, C un cercle de (P). La projection $\mathcal{P}$ la plus simple s'effectue sur le plan médian

(¹) Séance du 3 février 1930.

(²) *Œuvres*, 2; en particulier p. 167-177, une première étude de la congruence paratactique.

(³) A. Bloch, *Comptes rendus*, 177, 1923, p. 731 et 858; *Journ. de Math.*, 9ᵉ série, 3, 1924, p. 51. — J. Hadamard, *Nouv. Ann.*, 6ᵉ série, 2, p. 257, 289 et 314; *L'Enseignement scientifique*, 1, x, 1928, p. 296. — P. Robert, *L'Ens. scient.*, 1, iv, 1928, p. 108; 2 xviii, 1929, p. 230. — P. Delens, *Comptes rendus*, 188, 1929, p. 126 et 292. — B. Gambier, *L'Ens. scient.*, 3, xxii, 1929, p. 33.

$\varpi(z=0)$, les foyers $M(\alpha, \beta, \gamma)$ sur Δ, $\overline{M}$ sur $\overline{\Delta}$, se projetant en μ et $\overline{\mu}$, sur $\delta(y=ix, z=0)$ et $\overline{\delta}$, droites isotropes de ϖ, sécantes en O.

$\mathcal{E}_{\varpi}^{-1}$ associe à μ et $\overline{\mu}$ le segment OL, on encore le point L, d'affixe $\zeta = \alpha - i\beta = 2\alpha$; O et L sont les foyers réels de l'ellipse E, projection de C; C étant orthogonal à la sphère principale $\Sigma(x^2+y^2+z^2+R^2=0)$, le cercle principal C_0 de E coupe aux extrémités d'un diamètre le cercle $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$ $(x^2+y^2=R^2, z=0)$ de (P), situé dans ϖ : l'ellipse E a un petit axe de longueur constante $2R$.

Le réseau plan des ellipses E est une image de (P), comme aussi le réseau des cercles C_0. On peut compléter l'épure de (P) par une seconde projection sur un plan orthogonal à ϖ : à C correspond une ellipse dont le centre est sur la trace de ϖ, et dont les foyers réels se projettent sur cette trace aux extrémités d'un segment de longueur constante $2R$.

3. Soient C, C′ deux cercles axiaux de (P); chacun d'eux portant les foyers de l'autre, il en est de même pour les ellipses E, E′ et leurs foyers imaginaires. Chacun des segments OL, OL′ représentant deux points imaginaires conjugués de E′ ou E, les points O, L, L′ sont alignés et $\overline{OL}.\overline{OL'} = -4R^2$.

Les points employés par MM. Hadamard et Bloch pour la représentation de (P) sur ϖ sont H, milieu de OL (centre de C, E, C_0), et B, inverse de H par rapport à Σ; H et B s'échangent avec C et C′. Les représentations par les points L, H, B sont équivalentes.

La représentation spatiale de μ et $\overline{\mu}$ est le cercle $\Gamma = C\mathcal{C}'$, de diamètre OL, orthogonal à ϖ; la fausse projection de (P) est la congruence (II) des cercles Γ tangents en O à la droite D, axe de $\mathcal{C}$.

4. Une chaîne de points imaginaires d'une droite est l'ensemble des points tels que quatre d'entre eux aient un birapport réel [1]; la projection $\mathcal{E}$ conserve chaînes et birapports. A une cyclide de Dupin de (P) correspond une chaîne de $\Delta(\overline{\Delta})$. puis une de $\delta(\overline{\delta})$; la représentation de celle-ci sur le plan de Gauss est *tracée* par L sur ϖ, suivant un cercle, avec conservation du birapport. L'angle de parataxie de deux cercles de (P) est défini par le birapport de leurs foyers et pieds sur Σ (foyers des cercles axiaux) : d'où les propriétés de la représentation plane et de la représentation sphérique qui s'en déduit, par projection stéréographique sur σ, de grand cercle $\mathcal{C}$.

---

[1] Notion due à von Staudt; cf. *Encycl. des Sc. math.*, III, 8, p. 105, et J.-L. Coolidge, *A Treatise on the circle and the sphere*, p. 535-545. Oxford, 1916.

5. Le principe II donne sur σ une autre représentation sphérique, *dédoublée*, valable dans les mêmes conditions pour tous les cercles C orthogonaux à Σ : c'est la représentation de M. Gambier [1]. Dans la projection $\mathfrak{S}$ sur σ, Σ est représentée par homothétie (rapport $\pm i$), d'où encore ici la conservation des chaînes et birapports.

Nos méthodes s'appliquent à des cercles C quelconques avec deux projections $\mathfrak{T}$ ou $\mathfrak{S}$, d'où deux images *dépendantes*. Plus généralement, on aura des correspondances entre cercles par homographies ou transformations ponctuelles *généralisées* $\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{L}^{-1}$, $\mathcal{L}\mathcal{T}\mathcal{L}^{-1}$ ($\mathcal{H}$ homographie, $\mathcal{T}$ transformation ponctuelle), les premières seules conservant toujours birapports et chaînes à une ou plusieurs dimensions. Ceci répond à deux suggestions de M. Coolidge : développement de la représentation de Laguerre; transformations des cercles qui ne soient pas des opérations sphériques.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le problème de M. J. Hadamard d'uniformisation des ensembles*. Note de M. **N. Lusin**, présentée par M. Hadamard.

1. Considérons un plan XOY et, dans ce plan, un ensemble de points E. Nous dirons que l'ensemble E est *uniforme relativement à l'axe* OX si toute parallèle à l'axe OY coupe E en un point au plus.

En général un ensemble de points E n'est pas uniforme, et ceci nous amène à proposer la définition suivante : *Nous dirons qu'un ensemble de points* E *est uniformisable lorsqu'on sait obtenir une partie uniforme* E_1 *de* E *ayant la même projection sur l'axe* OX. Cet ensemble E_1 est dit *uniformisant* et trouver un tel ensemble E_1 c'est *uniformiser* l'ensemble donné E.

Ce problème d'uniformisation paraît présenter de grandes difficultés. Or, comme le note M. J. Hadamard, l'application du raisonnement de M. Zermelo nous donne la preuve immédiate de l'existence des ensembles uniformisants : il suffit de choisir *ad libitum* un point de E sur chaque droite $x = x_0$ qui coupe effectivement l'ensemble E; ce choix pouvant être fait pour chacune des droites $x = x_0$ peut être fait pour *toutes* ces droites.

On peut se demander si cette preuve n'est pas purement idéale, c'est-à-

---

[1] J'ignorais, lors d'une première rédaction récente de cette Note, l'article de M. Gambier. De son côté, M. Robert était parvenu à cette représentation au moyen de méthodes d'une grande généralité qui l'ont conduit à des résultats très importants.

dire *s'il existe réellement* des ensembles uniformisants pour tout ensemble E donné. On arrive alors naturellement à poser le problème de M. J. Hadamard : *Est-il ou non possible de définir un ensemble de points* E *tel qu'on ne puisse nommer aucun ensemble uniformisant* E_1, *c'est-à-dire le distinguer sans ambiguïté de tous les autres ensembles uniformisants?*

2. Historiquement ce problème a été indiqué par M. J. Hadamard pendant le grand débat sur le raisonnement de M. Zermelo qui a eu lieu en 1904 entre MM. Hadamard, Borel, Lebesgue et Baire, et qui a été publié dans les *Cinq lettres sur la théorie des ensembles*. Citons textuellement un passage de la première lettre de M. J. Hadamard à M. E. Borel (*Bulletin de la Société mathématique de France*, décembre 1904) :

... C'est d'ailleurs une pure question de sentiment; car la notion de correspondance « qui peut être décrite » est ... « en dehors des Mathématiques »; elle relève du domaine de la psychologie et est relative à une propriété de notre esprit; c'est une question de cette nature que celle de savoir si la correspondance employée par M. Zermelo pourra jamais être indiquée *en fait*.

Quant à l'existence de cette correspondance, elle me parait aussi adéquate à la possibilité de prendre *un* élément dans un ensemble quelconque donné, que la proposition suivante :

A. *Un nombre x étant donné, il existe des nombres y qui ne sont liés à x par aucune équation algébrique à coefficients entiers,*

l'est à celle-ci :

B. *Il existe des fonctions y de x telles que, pour aucune valeur de x, y n'ait ni valeur algébrique, ni une valeur liée à x par une équation algébrique à coefficients entiers.*

On pourrait d'ailleurs, sans doute, former de telles fonctions. Mais ce que je prétends, c'est que cela n'est nullement nécessaire pour affirmer l'exactitude du théorème B; et je crois que beaucoup de mathématiciens ne prendraient pas plus que moi cette peine s'ils avaient à employer le théorème en question.

La forme que M. J. Hadamard a bien voulu donner à son problème peut paraître au premier abord un peu particulière. Mais aucun lecteur ne s'y trompera; il est évident que, en réalité, il s'agit d'un ensemble plan E *quelconque* ayant des points sur chaque parallèle à l'axe OY.

3. Il paraît que la famille des ensembles analytiques est la dernière où l'uniformisation est possible; les ensembles projectifs ne l'admettent plus. Voici les résultats précis à cet égard.

Théorème I. — *Tout ensemble analytique peut être uniformisé au moyen d'une différence de deux ensembles analytiques.*

Théorème II. — *Il existe un ensemble analytique* E *ayant l'axe* OX *pour*

projection et qui ne peut pas être uniformisé au moyen d'un complémentaire analytique.

THÉORÈME III. — *Tout ensemble mesurable* B *peut être uniformisé au moyen d'un complémentaire analytique* (¹).

THÉORÈME IV. — *Si l'ensemble* E, *analytique ou mesurable* B, *est coupé par chaque parallèle à* OY *en une infinité dénombrable de points au plus, alors* E *est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles uniformes.*

Dans ce dernier cas, l'uniformisation nous donne, par suite, les renseignements complets sur la structure de l'ensemble considéré E.

4. Il ne reste qu'à considérer l'uniformisation des complémentaires analytiques plans E. Or ici l'uniformisation est impossible, même si l'ensemble E est coupé en une infinité dénombrable par chaque droite $x = x_0$.

La notion d'un complémentaire analytique est *purement négative*, donc *idéale*. Choisir un élément dans un complémentaire analytique c'est choisir un élément dans un ensemble *stationnaire* et, en même temps, *le plus général*. L'uniformisation d'un complémentaire analytique plan est visiblement identique au choix d'un point distingué fait dans *toute* partie du continu. Or, même les idéalistes les plus hardis ne semblent plus admettre le continu bien ordonné *en fait*.

Voici maintenant la solution *positive* du problème de M. J. Hadamard. Considérons la série infinie

$$(S) \qquad \varphi_1(x).P_1(t) + \varphi_2(x).P_2(t) + \ldots + \varphi_n(x).P_n(t) + \ldots,$$

où la suite $P_1, P_2, \ldots$ est composée de tous les polynomes en t à coefficients rationnels et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ est une courbe péanienne continue remplissant tout l'espace à une infinité dénombrable de dimensions. Nous marquons sur chaque droite $x = x_0$ tous les points dont les ordonnées y *ne* sont *pas* des valeurs de la somme de la série (S) où l'on pose $x = x_0$. L'ensemble plan E ainsi obtenu ne peut pas être uniformisé; d'ailleurs, on démontre aisément que E est un complémentaire analytique.

Pour les *idéalistes* il y a des sous-ensembles uniformisants E_1 idéaux, indéfinissables pour nous et néanmoins existants *en soi*. Pour les *réalistes* un exemple d'un ensemble plan E sans sous-ensembles uniformisants E_1 n'est pas plus étonnant qu'une fonction continue sans dérivée.

(¹) Ce résultat a été obtenu simultanément par M. W. Sierpinski et par l'auteur.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les δs-fonctions de M. Hausdorff.* Note de MM. **L. Kantorovitch** et **E. Livenson**, présentée par M. Hadamard.

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ des ensembles de points (dans l'espace R_m), appartenant à une classe $\mathcal{F}$ d'ensembles. Nous appelons, avec M. F. Hausdorff (¹), δs-fonction de ces ensembles-arguments l'ensemble

$$E = \Phi(E_1, E_2, \ldots) = \sum_{\nu \in \mathfrak{N}} E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots, \tag{1}$$

où la sommation s'étend à toutes les suites $\nu = (n_1, n_2, n_3, \ldots)$ de nombres naturels qui appartiennent à un ensemble donné $\mathfrak{N}$ de telles suites. Au lieu de $\mathfrak{N}$, il nous sera plus commode d'indiquer l'ensemble N (²) de nombres irrationnels

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2} + \ldots};$$

nous l'appellerons *base* de la δs-fonction, en désignant celle-ci par $\Phi_N(E_1, E_2, \ldots)$. Les ensembles (dans R_m) qu'on peut construire moyennant la fonction Φ_N, à partir des ensembles $E_1, E_2, \ldots$ de la classe $\mathcal{F}$, forment une Φ_N-classe sur $\mathcal{F}$. Le but de cette Note est d'indiquer la liaison entre quelques Φ_N-classes importantes et leurs bases N. Nous allons caractériser ces ensembles N de manière à faciliter les applications aux ensembles projectifs de M. Lusin.

Il est à remarquer que les résultats suivants s'étendent facilement à quelques autres espaces métriques, particulièrement à l'espace E_ω.

1° Si les ensembles $F_1, F_2, \ldots$ (en nombre fini ou en infinité dénombrable) varient respectivement dans une Φ_{N_1}-classe, Φ_{N_2}-classe, ... sur $\mathcal{F}$, leurs sommes $E_1 + E_2 + \ldots$ forment aussi une Φ_N-classe sur $\mathcal{F}$, dont la base N est la somme des ensembles holomorphes à N_i et placés dans les ensembles ouverts disjoints.

2° Il en sera de même pour la classe d'ensembles-produits $F_1 F_2 F_3 \ldots$, la base N cette fois étant homéomorphe à un ensemble dans l'espace E_ω, tel que les coordonnées de ses points varient indépendamment dans les ensembles $N_1, N_2, \ldots$.

(¹) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 2ᵉ Auflage, 1927, p. 89.
(²) Cette idée féconde est due à M. D. Faddeeff.

3° Les compléments aux ensembles d'une Φ_N-classe sur $\mathcal{F}$ forment une $\Phi_{\bar{N}}$-classe sur $C\mathcal{F}$ (la classe $C\mathcal{F}$ est composée de complémentaires aux ensembles de $\mathcal{F}$), dont la base $\bar{N}$ est complémentaire à un ensemble se déduisant par la même Φ_N-opération de certains ensembles F_σ bien déterminés.

4° Désignons par $\mathcal{F}_m$ la classe des ensembles fermés et bornés dans R_m $(m > 1)$. Si une Φ_N-classe sur $\mathcal{F}_m$ est telle qu'elle ne s'altère pas lorsqu'on remplace ses ensembles par leurs produits par un ensemble G_δ fixe, les projections sur R_n $(n < m)$ des ensembles de cette Φ_N-classe forment également une $\Phi_{N'}$-classe sur $\mathcal{F}_n$. La base N' de celle-ci se déduit aussi par la Φ_N-opération de certains ensembles $F_{\sigma\delta}$.

5° Soit $T = \Phi_{N_0}(E_1, E_2, \ldots)$, E_i appartenant à une Φ_{N_i}-classe sur $\mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \ldots)$; ces ensembles T forment également une $\Phi_{N'}$-classe sur $\mathcal{F}$.

Pour caractériser sa base N', désignons généralement par N^* un ensemble plan de points (x, y) tels, que $y \varepsilon N$, x étant quelconque, et introduisons un ensemble plan S fixe du type G_δ. Alors N' s'obtiendra à partir des ensembles S, N_0^*, N_1^*, N_2^*, ... par des opérations des types suivants : homéomorphie, addition, multiplication.

6° La δs-fonction (*) peut être définie par l'opération projective suivante : Posons

$$\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \left(\cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cdots + \cfrac{1}{n_k}}}, \; \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cdots + \cfrac{1}{n_k + 1}}} \right),$$

$$H_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \mathcal{E}_{x,y}(x \varepsilon E_{n_k}, \, y \varepsilon \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}), \qquad R = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{(n_1, n_2, \ldots, n_k)} H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

Alors l'ensemble $E[\varphi(*)]$ sera la projection, sur l'axe de x, de l'ensemble plan RN^*.

7° Soit $G = F(E_1, E_2, \ldots)$ un ensemble fonction des ensembles E_1, E_2, ... (variables dans une classe $\mathcal{F}$), définie de manière que le point appartient à G ou non, suivant celui de ces ensembles E_1, E_2, ..., où il est contenu. Alors cette fonction sera forcément une δs-fonction des ensembles E_1, E_2, ... et de leurs complémentaires.

Enfin, signalons deux énoncés connus :

8° Pour les ensembles d'une Φ_N-classe sur $\mathcal{F}_m$, il existe toujours un ensemble universel (dans R_{m+1}), c'est-à-dire un ensemble F (de la classe sur $\mathcal{F}_{m+1}$) dont les sections par des hyperplans parallèles à un des plans coordonnés, donnent tous les ensembles de cette classe et ces ensembles

seulement [voir A. Kolmogoroff, *Opérations sur des ensembles* (*Rec. mathématique de Moscou*, 35, 1928, p. 418). — L. Kantorovitch, *Sur les fonctions universelles* (*Journ. de la Soc. Ph.-Math. de Leningrad*, 1929, p. 13)].

9° Les Φ_N-classes sur $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ étant la classe des ensembles ouverts dans R_m) sont des invariants topologiques dans R_m (1).

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Les fonctions de deux variables complexes et les domaines cerclés de M. Carathéodory*. Note de M. **Henri Cartan**.

A tout système de deux nombres complexes x et y faisons correspondre un point d'un espace à quatre dimensions réelles. Deux domaines (2) D et D' de cet espace seront dits en *correspondance analytique* s'il existe un système de deux fonctions analytiques des variables complexes x et y,

$$X = f(x, y), \qquad Y = g(x, y),$$

établissant une correspondance biunivoque entre les deux domaines.

J'appelle *domaine cerclé* un domaine qui contient l'origine ($x = y = 0$) à son intérieur, et qui, s'il contient (x, y), contient aussi $(xe^{i\theta}, ye^{i\theta})$ (θ réel quelconque). Si en outre il contient $(xe^{i\theta}, ye^{i\varphi})$ (θ et φ réels quelconques), je l'appelle *domaine de Reinhardt* (3). J'appelle *domaine cerclé étoilé* un domaine qui contient l'origine à son intérieur, et qui, s'il contient (x, y), contient aussi (kx, ky) (k complexe, $|k| \leq 1$).

J'appelle domaine *maximum* un domaine D tel qu'il existe une fonction $f(x, y)$, holomorphe dans D, et non prolongeable au delà.

Un domaine cerclé non étoilé, et, d'une façon générale, un domaine quelconque D n'est pas forcément *univalent* (*schlicht*) : on peut concevoir que des points distincts de D coïncident avec un même point de l'espace. On peut même supposer que D admet à son intérieur des continuums de ramification, pourvu que le voisinage de tout point de D puisse être mis en correspondance analytique avec un domaine univalent.

Théorème I. — *Si une fonction $f(x, y)$ est méromorphe dans un domaine*

---

(1) Cela résulte de raisonnements de M. W. Sierpinski (*Comptes rendus*, 171, 1920, p. 24). Nous devons cette remarque à M. L. Natanson.

(2) J'appelle *domaine* un ensemble connexe de points intérieurs, sans m'occuper des points frontières.

(3) Pour ces dénominations, voir Carathéodory, *Ueber die Geometrie der analytischen Abbildungen* (*Math. Seminar der Hamburg. Univ.*, 6, 1928, p. 96-145).

cerclé D (non univalent *a priori*), *elle reprend forcément la même valeur en deux points de* D *qui coïncident avec un même point de l'espace*. On doit donc, au point de vue des transformations analytiques, considérer deux tels points comme identiques, et D comme univalent. Si $f(x, y)$ est holomorphe, le théorème I découle du suivant :

Théorème II. — *Toute fonction* $f(x, y)$, *holomorphe dans un domaine cerclé* D, *est développable en série* $\sum_0^{\infty} P_n(x, y)$ (P_n polynome homogène de degré n), *uniformément convergente au voisinage de tout point de* D. On en conclut que $f(x, y)$ est holomorphe dans un domaine cerclé *étoilé* (¹) contenant D.

Théorème III. — *Le domaine total de convergence* (²) *d'une série* $\Sigma P_n(x, y)$ *est un domaine cerclé étoilé maximum* Δ; *réciproquement, tout domaine cerclé maximum est le domaine total de convergence d'une série* $\Sigma P_n(x, y)$.

La relation bien connue entre les rayons de convergence associés d'une série double de Taylor exprime que le domaine de convergence de cette série (domaine de Reinhardt) est *maximum*; c'est le plus grand domaine de Reinhardt inscrit dans notre domaine Δ.

Théorème IV. — D *étant un domaine cerclé quelconque, tous les domaines cerclés maxima, contenant* D, *contiennent l'un d'entre eux* Δ (*plus petit domaine cerclé maximum* contenant D). Toute fonction holomorphe dans D est aussi holomorphe dans Δ, et *ne prend dans* Δ *que les valeurs qu'elle prend dans* D.

Théorème V. — $d\omega$ *désignant l'élément de volume de l'espace à quatre dimensions, et*

$$f(x, y) = \sum_0^{\infty} P_n(x, y)$$

étant une fonction holomorphe dans un domaine cerclé borné D, *on a*

$$\iiiint_D |f(x, y)|^2 d\omega = \sum_0^{\infty} \iiiint_D |P_n(x, y)|^2 d\omega.$$

(¹) M. Hartogs a établi notre théorème II en supposant *a priori* que D était étoilé (*Math. Ann.*, 62, 1906, p. 1-88 ; voir paragraphe 11).

(²) C'est forcément un domaine de convergence *uniforme* (Hartogs, *loc. cit.*).

THÉORÈME VI. — *Si deux domaines cerclés bornés sont en correspondance analytique*

$$X = f(x, y), \qquad Y = g(x, y), \qquad [f(0, 0) = g(0, 0) = 0],$$

on a nécessairement

$$X = ax + by, \qquad Y = a'x + b'y.$$

THÉORÈME VII. — *Tout domaine borné (univalent ou non), qui admet une infinité de transformations analytiques en lui-même, laissant fixe un point intérieur, peut être mis en correspondance analytique avec un domaine cerclé univalent* (1).

THÉORÈME VIII. — *Si les transformations analytiques d'un domaine borné* D *en lui-même, qui laissent fixe un point intérieur, dépendent de deux paramètres,* D *est représentable sur un domaine de Reinhardt; si elles dépendent de plus de deux paramètres,* D *est représentable sur une hypersphère* (2).

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les domaines fondamentaux des fonctions méromorphes.* Note de M. **MILOCH RADOÏTCHITCH**, présentée par M. Émile Borel.

Dans la présente Note nous appellerons un domaine ouvert de la surface de Riemann d'une fonction analytique $z = \varphi(\zeta)$, un *feuillet*, s'il satisfait aux trois conditions suivantes : 1° il recouvre tout le plan de ζ sans laisser de domaines complémentaires; 2° il ne le recouvre dans aucune partie plus d'une seule fois; 3° chaque partie de sa frontière est commune à certains domaines de la surface, extérieurs au domaine considéré.

A chaque feuillet ainsi défini, de $\varphi(\zeta)$, correspond sur la surface de Riemann de la fonction inverse $\zeta = f(z)$, un domaine ouvert que nous appellerons un *domaine fondamental* de $f(z)$ (3). Dans un domaine fondamental d'une fonction analytique, celle-ci est par conséquent univalente

(1) Il y a peut-être un cas d'exception, qu'il serait trop long d'expliquer ici, et qui peut en tout cas se lever moyennant une condition supplémentaire, peu restrictive. Notons qu'il existe des domaines bornés qui ne satisfont pas aux conditions d'application du théorème VII.

(2) Aucun cas d'exception n'est possible ici.

(3) Le *domaine fondamental* est une expression qu'on trouve chez F. Klein, employée dans un sens un peu différent, pour les fonctions de H. Poincaré.

et elle y prend toute valeur, soit dans l'intérieur, soit sur la frontière comme une valeur limite.

Nous dirons enfin qu'une surface de Riemann est *divisible* en feuillets (ou en domaines fondamentaux), s'il existe sur cette surface une suite de feuillets (resp. de domaines fondamentaux) sans domaines communs, et qui ne laisse subsister sur la surface aucun domaine qui soit extérieur à cette suite.

Ceci étant posé, nous allons signaler quelques conséquences immédiates des deux propositions suivantes :

I. La surface de Riemann de la fonction inverse d'une fonction méromorphe est illimitée ([1]).

II. Toute surface de Riemann illimitée est divisible en feuillets dont les frontières sont continues ([2]).

Si nous considérons la fonction inverse, nous obtenons de la proposition II, immédiatement la suivante :

III. La surface de Riemann d'une fonction analytique dont l'inverse a une surface illimitée, est divisible en domaines fondamentaux, dont les frontières sont continues dans tous les points au moins, où la fonction n'a que des singularités algébriques.

Passons aux fonctions méromorphes. En appliquant I à II et III nous obtenons respectivement les deux propositions suivantes :

IV. *La surface de Riemann de la fonction inverse d'une fonction méromorphe est divisible en feuillets dont les frontières sont continues.*

V. *Le plan des z d'une fonction méromorphe $f(z)$ est divisible en domaines fondamentaux de cette fonction, dont les frontières sont continues.*

On voit facilement comment la dernière affirmation dans V résulte de III. Le point $z = \infty$ étant la seule singularité transcendante, les discontinuités de la frontière d'un domaine fondamental devraient se limiter à ce point seul. Puisque c'est impossible, il faut bien que la frontière de ce domaine soit continue.

([1]) M. F. Iversen, *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes* (*Thèse*, 1914, p. 8), M. G. Valiron en a simplifié la démonstration : *Démonstration de l'existence pour les fonctions entières des chemins de détermination infinie* (*Comptes rendus*, 166, 1918, p. 382). J'ai donné à cette proposition la forme actuelle dans ma Note *Sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes* (*Comptes rendus*, 189, 1929, p. 1240), où je l'ai démontré d'une autre manière, ignorant les résultats des travaux cités de M. Iversen et M. Valiron.

([2]) La démonstration de cette proposition se trouve dans mon travail *Sur la division des surfaces de Riemann en feuillets* (*Publ. de l'Acad. Roy. Serbe*, 134, 1929).

DYNAMIQUE. — *Extension au cas d'un nombre quelconque de degrés de liberté d'une propriété relative aux Systèmes Pfaffiens.* Note de M. **Lucien Féraud**, présentée par M. Goursat.

Dans le voisinage d'un point d'équilibre, on peut considérer un système Pfaffien comme dérivant d'une forme différentielle linéaire

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} R_i \, d\xi_i + \sum_{i=1}^{n} S_i \, d\eta_i + Q \, dt,$$

qui satisfait aux conditions initiales suivantes : R_i, Q n'ont aucun terme de degré inférieur au second et S_i n'en renferme qu'un seul qui est ξ_i ($\xi_i = \eta_i = 0$ étant le point d'équilibre). La réduction de ω à une forme canonique s'obtient par un changement de variables de la forme

$$(c) \qquad \xi_i = \bar{\xi}_i + F_i, \qquad \eta_i = \bar{\eta}_i + G_i,$$

F_i, G_i commençant par des termes du second degré au moins. Ceci résulte, au point de vue *formel*, c'est-à-dire sans considérer la question de la convergence des séries, du Mémoire même dans lequel M. Birkhoff (¹) introduit la forme ω. Dans une Note précédente (²), j'ai établi dans le cas $n = 2$ l'analyticité de F_i, G_i; je me propose ici d'esquisser comment j'ai pu étendre ce résultat pour un nombre quelconque de degrés de liberté.

En posant

$$(1) \qquad \xi_i = x_i, \qquad \eta_i = y_i + u_i,$$

je suis conduit à considérer le système

$$(S) \qquad \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} S_j(x, y+u) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + R_i(x, y+u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dans lequel les x, y sont des variables indépendantes, les u des fonctions inconnues. Je commence par établir pour ce système l'existence d'une solution holomorphe au voisinage du point $x = y = 0$ et satisfaisant aux conditions

---

(¹) *Stability and the Équations of Dynamics* (*American Journal of Mathematics*, **49**, I, 1927, p. 1).

(²) *Comptes rendus*, **188**, 1929, p. 1144.

initiales suivantes :

$$(u_i)_0 = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial u_p}{\partial y_q}\right)_0 = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots, n+1;\ q = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial y_h \partial y_k}\right)_0 = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Je me reporte pour cela au théorème d'existence donné par Riquier [1] pour les systèmes d'équations simultanées aux dérivées partielles et je l'applique au système (S) que je *prolonge* d'abord en lui adjoignant le système (S′) de ses conditions d'intégrabilité convenablement résolues par rapport aux dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ $(i < k)$. Au voisinage des valeurs $x = y = u = 0$ tous les coefficients de ce système sont holomorphes. On s'assure alors : 1° de son *orthonomie ;* 2° de sa *passivité*, et l'on montre ensuite que l'on peut obtenir les conditions initiales que nous nous sommes imposées par un choix approprié des *dérivées paramétriques* qui restent arbitraires. Ainsi, en prenant pour les u la solution du système (S) dont on vient d'établir l'existence, le changement de variables (1) remplace ω par

$$\sum_{i=1}^{n}\left[S_i(x, y) - \frac{\partial u_{n+1}}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{n} S_j(x, y)\frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right] dy_i + du_{n+1} + Q\,dt.$$

Considérons maintenant les équations

$$S_i - \frac{\partial u_{n+1}}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{n} S_j \frac{\partial u_j}{\partial y_i} = z_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

elles définissent une transformation

$$(2) \qquad y_i = y_i, \qquad x_i = \Phi_i(y, z),$$

dont le Jacobien est égal à l'unité pour $x = y = 0$.

De plus, on voit facilement que chaque Φ_i ne contient qu'un seul terme de degré inférieur au second qui s'écrit précisément z_i. On arrive donc à conclure qu'en effectuant successivement les changements de variables (1) et (2), qui sont bien de la forme (c), on peut réduire ω à $\overline{\omega} + dE + Q\,dt$; $\overline{\omega}$ étant la forme canonique $\sum_{i=1}^{n} z_i\,dy_i$ et dE une différentielle totale exacte.

---

(1) *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles;* en particulier, le Chapitre VII, p. 201-254 (Gauthier-Villars, 1910).

Si, maintenant, au lieu d'envisager cette conclusion du point de vue de la dynamique, on se place à celui de la théorie des équations de Pfaff, on s'aperçoit qu'elle prend une signification nouvelle. En effet, elle permet d'obtenir, par un changement de variables holomorphe, la réduction de l'équation $\omega = 0$ a une forme canonique $\bar{\varpi} + dE = 0$, et ceci au voisinage d'un point pour lequel tous les coefficients de $\omega^{(2m-2)}$ sont nuls, et où, par conséquent, le théorème général de M. Goursat [1], établissant l'existence d'un *groupe principal*, ne s'applique plus. Ce théorème peut donc être considéré comme susceptible d'être étendu, à l'aide du résultat ci-dessus, dans tous les cas où nos hypothèses relatives aux R_i, S_i sont satisfaites.

MÉCANIQUE ANALYTIQUE. — *Sur la réciproque du théorème de Lagrange.* Note [2] de M. **N. Četajev**, présentée par M. Émile Borel.

L'étude de l'instabilité, dans le voisinage d'une position d'équilibre où la fonction de forces n'est pas maxima, a fait l'objet des travaux de Liapounoff, de Hadamard, de Painlevé. Mais le problème n'a pu être résolu rigoureusement que sous certaines restrictions. Je me propose d'étudier ici ce problème.

En nous guidant par des considérations de Liapounoff (*Problème général de la stabilité du mouvement*, § 16), nous pouvons établir la proposition suivante par le mouvement permanent.

Soit V une fonction des variables x_i, possédant les propriétés suivantes :

1° Sa dérivée V', par l'inégalité $V' > 0$, définit un domaine C où V est aussi positif.

2° Sa dérivée deuxième V'' dans le voisinage de la surface $V' = 0$ de C conserve un signe et sur cette surface n'a pas le signe contraire.

Si une pareille fonction V peut être formée à l'aide des équations différentielles du mouvement troublé, le mouvement non troublé est instable.

Appliquons cette proposition générale au problème de l'instabilité du mouvement

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad \frac{dx_i}{dt} = x'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où la fonction de forces $U = U_m + U_{m+1} + \ldots$ dépend seulement des x_i et n'est pas maxima dans la position d'équilibre $x_i = 0$.

---

(1) *Leçons sur le Problème de Pfaff*, Chapitre IV et, en particulier, page 183-186 Paris, 1922.

(2) Séance du 3 février 1930.

Considérons

$$2V = U^2,$$

on peut écrire

$$V' = U \sum x'_i \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

$$V'' = \left(\sum x'_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 + U\left[\sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 + \sum \sum x'_i x'_j \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}\right].$$

Nous supposons que U n'est pas maxima. Ainsi il existe un domaine où $U > 0$. Sur la surface de ce domaine, V'' est essentiellement positif ou nul, et dans le domaine le signe de V'' n'est pas moins que celui de l'expression

$$W = \sum x'_i x'_j \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Si, dans un domaine C où les inégalités $U \geq 0$, $\sum x'_i \frac{\partial U}{\partial x_i} > 0$ existant simultanément, la fonction W est essentiellement positive, la solution $x_i = 0$ des équations du mouvement est instable.

Dans C existent des points où W n'est que positif. Dans C nous n'avons de point que sur la surface de C, où W est nul avec $\Delta = 0$; Δ est le discriminant de la forme quadratique W par rapport aux x'_i.

Si $\Delta < 0$, W n'est pas nul dans C. En effet, soit l'expression

$$\sum x'_i x'_j \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} - \lambda \left(\sum x'_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - \varepsilon\right) \qquad (\varepsilon > 0),$$

qui est minima pour certaines valeurs données des ε, x_i. Si x_i, x'_i se trouvent dans C, à $\lambda > 0$ correspond l'inégalité $W > 0$.

Pour λ nous avons :

$$\lambda \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial U}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial U}{\partial x_n} \\ \frac{\partial U}{\partial x_1} & & & \\ \cdots & & |\Delta| & \\ \frac{\partial U}{\partial x_n} & & & \end{vmatrix} > 0.$$

Le déterminant D de l'inégalité dernière est dans le domaine C positif. Dans le cas particulier, on peut le démontrer par un calcul direct; par exemple, pour $U = U_m$,

$$D = -\frac{m}{m-1} \Delta U_m.$$

Dans le cas général, on peut l'indiquer par la théorie des caractéristiques de Kronecker (*Berliner Monatsberichte*, mars 1869); si $\Delta < 0$ et $U > 0$, la valeur de U croît sur la ligne

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(1+\alpha) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dans l'espace $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Ainsi, dans C, W n'est que positif. La solution $x_i = 0$ des équations du mouvement est instable.

En employant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on peut aussi simplement indiquer le résultat analogue lorsque le système holonome est assujetti à certaines liaisons indépendantes du temps.

On obtient en résultat le théorème déjà énoncé par Appell (*Traité de Mécanique rationnelle*, 2, p. 333) : « Si, dans une position d'équilibre du système, U n'est pas maximum, c'est une position d'équilibre instable. »

HYDRODYNAMIQUE EXPÉRIMENTALE. — *Sur la formation des mouvements tourbillonnaires à l'arrière des solides immergés*. Note de M. **Jean Courrègelongue**, présentée par M. M. Brillouin.

J'ai étudié ([1]), les deux familles de tourbillons qui forment le remous à l'arrière des solides immergés dans un courant. Je complète ces premières observations par la description des phénomènes qui accompagnent la mise en mouvement d'un solide dans un fluide immobile. Je précise ainsi certains résultats de Prandtl et Tiedjens ([2]).

Je déplace un solide (cylindre ou plan mince) dans l'eau en repos parfait et j'observe les pseudo-images du sillage sur le fond. Les phénomènes sont semblables pour les deux sortes d'obstacles.

La plaque en expérience a 5^{cm} de largeur, elle est déplacée perpendiculairement à son plan. Si la mise en mouvement est brusque, on voit apparaître deux gros tourbillons à l'arrière, près des bords; la pseudo-image de chaque tourbillon est une grosse tache noire bordée d'un cercle brillant. Les deux tourbillons se rapprochent de la ligne médiane où ils entrent en contact, ils sont alors brusquement écartés l'un de l'autre; ils s'éloignent parallèlement au plan de l'obstacle. Nous avons ainsi formé deux tourbillons d'impulsion.

([1]) *Comptes rendus*, **189**, 1929, p. 972.

([2]) *Naturwissenschaften*, **13**, 1925, p. 1050.

Si la plaque reçoit un mouvement alternatif, ses deux faces sont le siège des mêmes phénomènes; mais les deux tourbillons formés au cours d'une demi-période contournant les bords de l'obstacle viennent choquer les deux tourbillons naissants de l'autre face et sont diffusés latéralement. La pseudo-image donne l'impression de deux boules noires qui oscillent autour des bords de l'obstacle.

Avec une mise en mouvement rectiligne moins vive que dans le premier cas, et suivie d'un déplacement progressif, les deux tourbillons d'impulsion laissent apparaître sur leur bord les deux chaînes de tourbillons adjoints qui prennent naissance au point de décollement des filets sur les bords extrêmes de la plaque (*fig.* 1). Avec une mise en marche encore plus lente, l'enroulement des chaînes est moins rapide (*fig.* 2). Dans ces deux cas les tourbillons se rencontrent encore sur la ligne médiane, puis s'écartent en restant reliés aux bords de la plaque par des chaînes qui s'allongent. Le sillage reste symétrique; on peut même par une deuxième impulsion dirigée dans le sens de la marche provoquer un nouvel enroulement symétrique des chaînes (*fig.* 3).

Avec un obstacle plus petit (plan de $2^{cm},5$) on peut reproduire les mêmes phénomènes. Le choc des tourbillons d'une même paire provoque la formation d'une nouvelle paire de tourbillons symétriques, mais toute irrégularité dans le mouvement amène une dyssymétrie et l'apparition de la forme alternée (*fig.* 4). Dès que cette disposition est apparue, elle est stable. L'aspect du sillage est alors celui que j'ai décrit dans la Note précédente, mais on peut observer ici plusieurs tourbillons alternés à la fois (*fig.* 5). Toute accélération et toute irrégularité dans le sens de la marche provoquent un enroulement des chaînes coïncidant avec un afflux de tourbillons adjoints; il y a là une cause d'erreur dans les mesures faites avec des courants à rafales ou avec des solides qui ne sont pas déplacés avec une parfaite régularité.

Si l'on déplace la plaque mince après l'avoir fixée à une lame élastique perpendiculaire à son plan, elle oscille avec une grande amplitude. La pseudo-image est alors modifiée : on a deux rangées de tourbillons très nets bordés d'une caustique brillante (*fig.* 6). Il pourrait y avoir dans cette double forme du même phénomène une nouvelle cause de désaccord entre les mesures faites avec des obstacles en vibration et celles qui seraient faites avec des obstacles fixes.

Le plan mince déplacé obliquement présente immédiatement une dyssymétrie d'autant plus marquée que l'obstacle est plus incliné sur la normale au courant. Le tourbillon du bord d'attaque est plus important que

celui du bord de fuite (*fig.* 7). Un système alterné se crée si le plan oblique progresse.

Enfin avec les petits obstacles le sillage présente les formes alternées

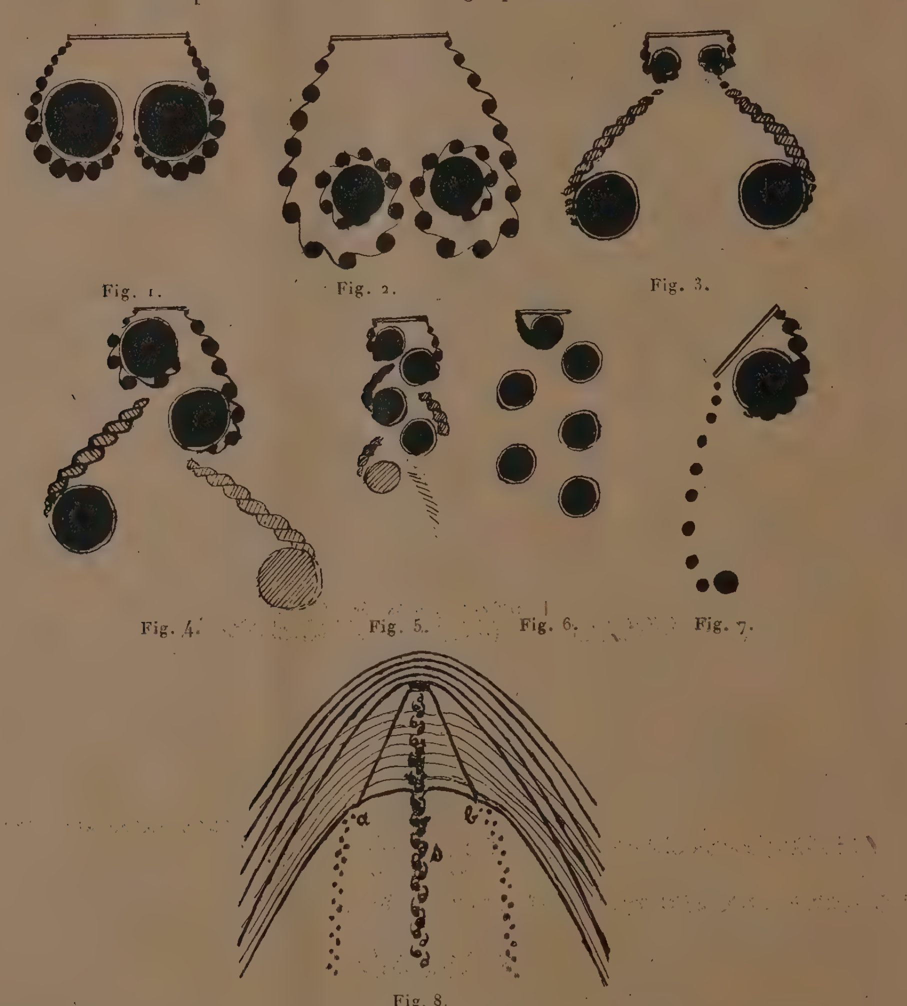

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8.

classiques de M. Bénard. Si la vitesse de l'obstacle dépasse la vitesse de propagation des ondes capillaires (23^{cm}), le seuil post-poupe, décrit par M. Bénard [1], s'éloigne de l'obstacle. On reconnaît qu'il est formé par le

[1] *Comptes rendus*, 156, 1913, p. 1003.

front de la première onde de gravité (*fig.* 8). Outre le sillage (s) qui passe par la brèche médiane, on a deux lignes latérales très écartées de fins tourbillons. Ces traînées font suite aux bords rectilignes (a, b) de l'arène. Quand la vitesse croît encore (50^{cm}) les points (a, b) sont rejetés en arrière et les traînées disparaissent. En même temps la zone post-poupe s'est creusée et le sillage central qui émerge en arrière est particulièrement intense.

HYDRAULIQUE. — *Conditions du passage, par une section, d'un courant permanent à ciel ouvert, uniforme ou graduellement varié.* Note de **M. G. Mouret**, présentée par M. Mesnager.

Il existe entre la valeur totale de la charge H (énergie totale du courant par kilogramme de liquide) sur le fond du lit, et la valeur Q du débit par la section considérée, abstraction faite du reste du courant, la relation établie par D. Bernoulli et complétée par Poncelet :

$$(1)\qquad \mathcal{H} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2},$$

où, négligeant l'inclinaison du lit supposée faible, la valeur du potentiel h peut être prise égale à la profondeur maxima du courant dans la section; ω est le débouché du courant et α le coefficient de Poncelet, fonction décroissante de h. Dans cette équation, si la section est de forme quelconque mais évasée, ou est rectangulaire, le débouché ω est une fonction croissante de la profondeur h, et le rapport $\frac{\alpha}{\omega^2}$ en est une fonction décroissante.

Directement de cette équation, ou par l'intermédiaire du conoïde à plan directeur qui la représente (coordonnées $\mathcal{H}$, h et Q^2), on déduit les conditions limitant les deux degrés de liberté ($\mathcal{H}$ et Q) dont jouit le courant. Ces conditions servent de base à toute la théorie des eaux courantes, dont les premiers principes sont les suivants.

Étant donnée la valeur du débit du courant, la charge ne peut être inférieure à une certaine valeur qui dépend du débit et de la forme de la section. La profondeur h' du courant doit alors être égale à l'unique racine de l'équation approchée

$$(2)\qquad \frac{\omega^3}{l} = \frac{\alpha Q^2}{g},$$

où l est la largeur de la surface libre. Au cas particulier du ressaut, la pro-

fondeur ainsi calculée est celle que Bresse a désignée sous le nom de *profondeur critique*. Pour préciser on la désignera, dans le cas général ici étudié, par le nom de *profondeur critique fonction du débit*. Il y a, en effet, une autre sorte de profondeur critique, car, étant donnée la valeur de la charge, le débit ne peut dépasser une valeur finie qui dépend également de la forme de la section. Cette profondeur h'' doit satisfaire à la relation, qui ne comporte qu'une racine, comme l'équation (2),

$$(3) \qquad \frac{\omega}{l} = 2(\mathcal{H} - h).$$

Cette profondeur critique h'', *fonction de la charge*, est, dans le cas général, supérieure à la profondeur h' fonction du débit.

Il y a corrélation entre le maximum de débit et le minimum de charge; ainsi, lorsque le débit du courant possède la valeur maxima que peut assurer la charge, celle-ci possède la valeur minima qui peut assurer le débit et vice versa.

Dans le cas général, les profondeurs critiques h' et h'' sont distinctes l'une de l'autre, comme de la profondeur d'eau effective; ce sont des profondeurs virtuelles. Mais si la charge et le débit atteignent leurs valeurs extrêmes, les deux profondeurs critiques se confondent avec la profondeur d'eau effective. On peut alors dire que le courant est à un *état critique*. Dans ce cas, la valeur du débit et celle de la charge doivent satisfaire à la relation

$$(4) \qquad \psi(\mathcal{H}, Q) = 0.$$

obtenue en éliminant la variable h entre les deux équations (2) et (3). Par exemple, pour une section rectangulaire, la fonction ψ prend la forme simple

$$(5) \qquad \frac{q^2}{\mathcal{H}^3} = \frac{8}{27}\frac{g}{\alpha},$$

q étant le débit par mètre de largeur. Cette formule a été établie par Bélanger pour le cas particulier de l'écoulement en déversoir, mais sa portée s'étend à tous les modes d'écoulement.

Les états critiques sont représentés sur le conoïde par sa ligne de striction, et à toute profondeur d'eau répond un état critique du courant dont la charge et le débit satisfont à l'équation (4).

De la considération du niveau critique se dégage une distinction fondamentale à établir entre les divers régimes, soit des courants uniformes, soit

des courants graduellement variés. Bien qu'un courant par une section semble ne posséder que deux degrés de liberté, cependant ce courant n'est pas complètement déterminé par sa charge et son débit (ou sa vitesse). Étant données la valeur de la charge et celle du débit deux courants sont possibles, car une parallèle à l'axe du conoïde coupe cette surface en deux points correspondant à deux courants de profondeurs différentes, comportant la même charge et le même débit. La profondeur de l'un des courants est d'ailleurs *inférieure*, celle de l'autre est *supérieure* aux deux profondeurs virtuelles h' et h'', h'' étant supérieur à h'.

Ces deux sortes de courants jouissent, dans toutes les circonstances, de propriétés opposées, de dénivellations de sens contraires, qu'il s'agisse d'une variation de charge ou de débit, ou d'une modification de forme, de largeur, de niveau ou de rugosité du lit. La théorie classique, celle de du Buat et de Dupuit, ne connaît qu'un seul de ces régimes, le régime *supracritique*, c'est le plus fréquent, car il est le régime naturel des cours d'eau de faible pente relativement au débit. Les régimes *infracritiques* échappent à la théorie classique.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Le mouvement des étoiles doubles sous l'action du champ de gravitation de la galaxie.* Note de M. **Henri Mineur**, présentée par M. Ernest Esclangon.

1° Soit

$$V = V_0 + \varphi_1(x_1, x_2, x_3) + \varphi_2(x_1, x_2, x_3) + \ldots$$

le potentiel de gravitation de la galaxie, φ_i désignant l'ensemble des termes de degré i. Prenons pour origine l'astre central d'un système binaire et pour axes les axes de la quadrique (Q), $\varphi_2 = 1$, soit

$$\varphi_2 = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2.$$

Le mouvement du compagnon est régi par les équations

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{x_i}{r^3} + A_i x_i. \tag{1}$$

Nous nous sommes proposé de trouver les termes séculaires du mouvement sans nous limiter aux faibles exentricités ni aux faibles inclinaisons.

2° Le demi-grand axe a ne contient pas de termes séculaires; soient γ_i les cosinus directeurs de la normale au plan de l'orbite, α_i ceux de la direc-

tion du périhélie, e l'excentricité. Ces quantités réduites à leur partie séculaire vérifient le système

$$\frac{\sqrt{f}}{a^{\frac{3}{2}}}\frac{d\gamma'_i}{dt} = (A_j - A_k)(\gamma'_j\gamma'_k - 5\alpha'_j\alpha'_k) + p_j\gamma'_k - p_k\gamma'_j,$$

$$\frac{\sqrt{f}}{\alpha^{\frac{3}{2}}}\frac{d\alpha'_i}{dt} = (5A_k + A_j)\gamma'_j\alpha'_k - (5A_j + A_k)\gamma'_k\alpha'_j + p_j\alpha'_k - p_k\alpha'_j,$$

où i, j, k est une permutation paire, $\gamma'_i = \gamma_i\sqrt{1-e^2}$, $\alpha'_i = \alpha_i e$; et où p_1, p_2, p_3 sont les composantes de la rotation instantanée de la galaxie.

3° Cherchons les cas où l'orbite est stable par rapport à des axes entraînés dans la rotation galactique :

Il n'y a qu'une position stable pour laquelle l'excentricité est nulle, la normale au plan de l'orbite est dans le méridien galactique de l'étoile double considérée.

4° Si l'on néglige p_1, p_2, p_3 et e, la normale au plan de l'orbite décrit un cône du second degré.

5° Supposons le principe d'équipartition de l'énergie vérifié dans l'univers galactique : soit $F(P, e, \gamma_i, \alpha_i)\,dP\,de\,d\omega\,dg$ le nombre d'orbites de période P, d'excentricité e, pour lesquelles le pôle de l'orbite est dans l'angle solide $d\omega$ entourant la direction γ_i et le périhélie dans l'angle dg du plan de l'orbite autour de la direction α_i.

On trouve que

$$\log F = \frac{HMM'}{(M+M')^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{2\pi f}{P}\right)^{\frac{2}{3}} + \log e + \frac{HMM'}{2(M+M')^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{f}{4\pi^2}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$\times P^{\frac{4}{3}}[5e^2(A_1\alpha_1^2 + A_2\alpha_2^2 + A_3\alpha_3^2) + (e^2-1)(A_1\gamma_1^2 + A_2\gamma_2^2 + A_3\gamma_3^2)] + \text{const.},$$

f est le coefficient d'attraction, M, M' les masses des composantes, H une constante. On en déduit les conséquences suivantes :

6° Il y a une corrélation entre les périodes et les excentricités.

Les pôles des orbites ont tendance à être plus nombreux dans la direction du plus petit axe de la quadrique Q.

Les périhélies ont tendance à être plus nombreux dans la direction du plus grand axe de Q.

7° Si l'on fait sur les coefficients A_i les mêmes hypothèses que dans une Note précédente ([1]), on trouve que les phénomènes décrits au n° 6° ne sont

---

([1]) *Comptes rendus*, 189, 1929, p. 1061.

observables que sur les étoiles doubles dont la période est largement supérieure à 100000 ans. On ne peut donc songer à les vérifier sur les orbites actuellement connues. La vérification serait tout au plus possible sur les couples très écartés et fixes; les angles de position de ces couples doivent présenter une tendance à se grouper autour de deux valeurs opposées ne dépendant que de la région du ciel considérée.

8° La théorie précédente ne permet donc pas d'expliquer les anomalies observées dernièrement sur les étoiles doubles; nous examinerons prochainement les résultats que l'on peut tirer d'une décroissance de masse des étoiles.

PYROMÉTRIE. — *Sur le calcul de la température des flammes et leur teneur en hydrogène atomique.* Note de M. G. **Ribaud**, présentée par M. A. Cotton.

Le calcul de la température des flammes données par les mélanges d'hydrogène et d'oxygène a jusqu'ici conduit à des valeurs notablement plus élevées que celles fournies directement par l'expérience, même si l'on tient compte de la dissociation de CO^2 et H^2O au sein de ces flammes. Par exemple pour la flamme C^2H^2+2O, le calcul a fourni à Pollitzer [1] la valeur 4030°C., alors que la mesure directe conduit à une température [2] voisine de 3100°C. [3]. Ces différences sont d'ailleurs incompatibles avec les incertitudes actuelles sur les valeurs des chaleurs spécifiques des gaz aux températures élevées ou sur les valeurs des fractions de dissociation de CO^2 et H^2O. Nous avons été conduit à rechercher l'influence de la dissociation en hydrogène atomique de l'hydrogène qui se trouve au sein de la flamme, et à calculer la température en tenant compte de cette dissociation.

Dans les calculs qui suivent nous avons admis pour les chaleurs spécifiques des gaz aux températures élevées et pour les fractions de dissociation de CO^2 et H^2O les valeurs indiquées par Bjerrum [4], pour les fractions de

---

(1) Pollitzer, *Zts. f. angewandte Chemie*, 35, 1922, p. 683.

(2) Température de la partie la plus chaude de la flamme, où le rayonnement et la conductibilité interviennent très peu.

(3) Henning et Tingwaldt, *Zts. f. Physik.*, 48, 1928, p. 805.

(4) Bjerrum, *Zts. f. physik. Chemie*, 79, 1912, p. 540.

dissociation de l'hydrogène les nombres obtenus par Langmuir [1] et pour la chaleur de dissociation de la molécule d'hydrogène la valeur moyenne 100000, actuellement la plus probable. Nous désignerons dans la suite par x_0, y_0, z_0 les fractions de dissociation de H^2O, CO^2 et H^2 purs sous la pression atmosphérique, et par x, y, z les fractions de dissociation correspondantes au sein de la flamme.

Flamme $H^2 + O$. — L'équilibre de dissociation des divers constituants de la flamme (H^2O, H^2, H) conduit aux équations suivantes :

$$\frac{x^3(1-z)^2}{(1-x)^2(2+x+2xz)} = \frac{x_0^3}{(1-x_0)^2(2+x_0)}; \qquad \frac{2xz^2}{(1-z)(2+x+2xz)} = \frac{z_0^2}{1-z_0^2}$$

faciles à résoudre, par approximations successives, pour chaque température. On aura la valeur de la température de la flamme en cherchant, par tâtonnements, la température pour laquelle l'énergie chimique mise en jeu dans la flamme se trouve égale à l'énergie calorifique gagnée par les constituants de la flamme. Le calcul conduit à

$$t = 2850^\circ C., \qquad x_{H^2O} = 0,22, \qquad z_{H^2} = 0,26 \quad (^2);$$

il fournirait $t = 3050^\circ C.$ si l'on néglige la dissociation de H^2.

Flamme $C^2H^2 + 5O$. — Le calcul thermodynamique conduit ici aux équations suivantes :

$$\frac{y^2(2y+x)}{(1-y)^2(6+2y+x+2xz)} = \frac{y_0^3}{(1-y_0)^2(2+y_0)},$$
$$\frac{x^2(1-z)^2(2y+x)}{(1-x)^2(6+2y+x+2xz)} = \frac{x_0^3}{(1-x_0)^2(2+x_0)},$$
$$\frac{2xz^2}{(1-z)(6+2y+x+2xz)} = \frac{z_0^2}{1-z_0^2};$$

leur résolution et le calcul de la température se font encore ici par approximations successives. On obtient

$$t = 3200^\circ C., \qquad x_{H^2O} = 0,45, \qquad y_{CO^2} = 0,85, \qquad z_{H^2} = 0,65 \quad (^3)$$

alors qu'en négligeant la dissociation de H^2 on trouve $t = 3780^\circ C.$: la différence est très importante.

Flamme $C^2H^2 + 2O$. — Des calculs analogues aux précédents conduisent à

$$t = 2975^\circ C., \qquad z_{H^2} = 0,28 \quad (^4);$$

en négligeant la dissociation de H^2 le calcul fournirait $3875^\circ C.$

---

(1) Langmuir, *J. Amer. Chem. Soc.*, 38, 1916, p. 2271; *General Electr. Rev.*, 29, 1926, p. 153.

(2) La flamme contient, en volume, environ 10 pour 100 d'hydrogène atomique.

(3) La flamme renferme 13,5 pour 100 d'hydrogène atomique, en volumes.

(4) Une telle flamme renferme, en volumes, 17 pour 100 d'hydrogène atomique.

Les températures calculées pour les deux dernières flammes s'accordent assez bien avec les mesures récentes de Henning et Tingwaldt (*loc. cit.*) (3100 et 3060°C.), les écarts peuvent s'expliquer uniquement par la connaissance imparfaite des données calorifiques actuelles relatives aux gaz aux températures élevées.

POUVOIR ROTATOIRE. — *Sur l'action de l'acide borique et des borates sur le pouvoir rotatoire de l'acide tartrique.* Note de M. E. **Darmois**, présentée par M. Ch. Fabry.

1. Depuis Biot qui a découvert cette action, un assez grand nombre de travaux ont paru sur la question. J'ai moi-même ([1]) repris cette étude par les méthodes générales exposées en divers endroits; j'ai pu montrer que les variations considérables de la rotation et de la dispersion rotatoire de l'acide tartrique étaient bien représentées en admettant que les deux acides se combinent dans la proportion $BO^3H^3 + 2C^4H^6O^6$. L'acide complexe obtenu est largement hydrolysé dans l'eau; en neutralisant par une base, on obtient des rotations beaucoup plus grandes; l'équilibre se déplace nettement dans ces conditions en faveur de l'ion complexe. Je n'ai réussi à isoler, ni l'acide complexe, ni un de ses sels. Cette lacune vient d'être comblée par M. Lowry ([2]) qui a obtenu un sel cristallisé de composition $(BT^2)K$, où B et T désignent par abréviation les radicaux des 2 acides. Il a mesuré également la dispersion rotatoire de ce produit en solution dans l'eau à la concentration de 5 pour 100; si l'on se reporte au Mémoire cité ([1]), on verra que l'acide complexe peut prendre environ 2,8 K sans se décomposer; le sel isolé est donc fortement hydrolysé à la concentration indiquée et la dispersion rotatoire se rapporte à un mélange. Le composé est d'ailleurs du type dont j'ai donné maints exemples; il possède un pH de stabilité maximum (aux environs de pH = 4). J'ai montré aussi en diverses publications que les mesures de pH étaient loin de donner des renseignements aussi intéressants que la dispersion rotatoire. On en trouve ici un autre exemple : M. Lowry donne la courbe de neutralisation du mélange $(BT^2)H'$ par la soude; on n'y remarque d'abord aucune singularité pour le sel $(BT^2)K$. De plus, avec 4 NaOH, le pH est voisin de 6 et M. Lowry admet que le complexe est décomposé, l'inflexion observée correspondant

([1]) *J. Chim. Phys.*, **23**, 1926, p. 649. On trouvera dans ce travail la bibliographie antérieure à 1926.

([2]) *J. Chem. Soc.*, **131**, 1929, p. 2853.

à la neutralisation de l'acide tartrique ; dans le Mémoire rappelé au début, la rotation observée dans ces conditions pour une solution $\frac{M}{2}$ en TH^2 est $\alpha_v^{2dm} = 9,97$ avec $\rho = \alpha_{4358} : \alpha_{5780} = 1,885$ alors que TNa^2 pur donne $\alpha_v^{2dm} = 7,28$ avec $\rho = 1,78$. Le complexe est loin d'être entièrement décomposé.

2. Dans mes publications antérieures sur les complexes que j'ai proposé d'appeler complexes de Biot-Gernez, j'ai indiqué une méthode assez commode pour l'étude de la cinétique de ces complexes ; elle consiste à faire agir l'oxyde acide sur un éther-sel de l'acide actif, elle a permis en particulier de proposer des formules de constitution pour les complexes molybdomaliques. Nous donnerons ici quelques-uns des résultats obtenus dans l'action de l'acide borique et des borates sur le tartrate d'éthyle.

L'acide borique n'a pas d'action sur le tartrate d'éthyle, même à 40° ; comme avec MoO^3 (¹), l'action ne devient sensible que si l'on neutralise partiellement l'acide borique. Le borax $\left(BNa^{\frac{1}{2}}\right)$ a déjà une action très nette à 40° ; le métaborate (BO^2Na) agit à 20°.

Exemple : Mélange $2\,BO^2Na + T(C^2H^5)^2$; conc. 0,2 M en tartrate. On prépare séparément les solutions aqueuses de borate et de tartrate, les mélange et suit la rotation à 20° à partir de cet instant :

T..........	$1^m 3/4$.	31^m.	52^m.	75^m.	$1^h 54^m$.	$5^h 30^m$.	$7^h 10^m$.	24^h.	48^h.
α_v^{2dm}.........	−2,25	−1,98	−1,82	−1,68	−1,49	−0,90	−0,70	+0,47	+1,47

La rotation initiale extrapolée est − 2,28 ; $\rho = 2,17$ pour $T = 31^m$. Pour différentes proportions B : T, les rotations initiales sont

B : T..............	0 (Éther pur).	1/2.	1.	2.	4.
α_{v_0}..............	+2,49	+0,42	−1,37	−2,28	−2,36

Une courbe construite avec ces valeurs donne immédiatement l'idée d'une combinaison instantanée dissociable entre BO^2Na et $T(C^2H^5)^2$. On a cherché à préciser la composition de cette combinaison en étudiant des mélanges de solutions équimoléculaires de borate et de tartrate. La combinaison a lieu dans la proportion 1 : 1 et la constante d'équilibre

$$\frac{(BO^2Na)[T(C^2H^5)^2]}{(\text{complexe})} = 0,017 \text{ à } 20° ;$$

(¹) *Bull. Soc. Chim. Fr.*, 4ᵉ série, 43-44, 1928, p. 1214.

on peut affirmer que, avec B : T = 4, 97 pour 100 de tartrate sont combinés. Dans ce complexe, la combinaison de l'acide tartrique doit avoir lieu par les OH alcooliques. Le pH initial est supérieur à 10 et l'on se trouve dans des conditions analogues à celles que j'ai réalisées en dissolvant l'acide borique dans le tartrate de soude en présence d'un fort excès d'alcali (*loc. cit.*); les rotations observées ont également été gauches.

On remarque de plus que la rotation varie lentement et finit par prendre des valeurs positives; il est facile de vérifier qu'on finit par atteindre la rotation, la dispersion rotatoire, le pH correspondant aux complexes droits dont nous parlons au début de cette Note. Le complexe $[BT(C^2H^5)^2]Na$ est instable en solution alcaline; le tartrate d'éthyle est lentement saponifié et l'on retrouve les conditions de formation des composés droits à partir de l'acide tartrique.

3. Dans le travail cité au début, M. Lowry propose une formule de constitution du composé droit où le bore possède un indice de coordination égal à 4; cette formule est d'accord jusqu'ici avec les faits; mais, comme je l'ai exprimé ailleurs ([1]), une systématique de ces composés exigera dans chaque cas la détermination du poids moléculaire, ce qui n'a été fait jusqu'ici que pour quelques complexes seulement.

PHYSIQUE. — *Remarques sur une Note de MM. Fabry et Dureuil, intitulée : Sur une prétendue transformation du plomb.* Note ([2]) de M^lle **Stéphanie Maracineanu.**

MM. Fabry et Dureuil ([3]) contestent les résultats publiés dans le *Bulletin de l'Académie roumaine* (12, VI, 1929).

Je tiens à donner quelques détails et à soutenir mes résultats. Le fait que les deux faces du plomb de la toiture de l'Observatoire de Paris ne présentent pas le même spectre est certain et les différences ne tiennent pas seulement au fer et au charbon.

1° En ce qui concerne la raie ultime 2536 du mercure et le flou qui l'entoure, ils paraissent dans les spectres *d'arc* de tous les plombs, et cette raie, ne paraissant pas dans les spectres d'étincelle, plus riches en raies,

---

([1]) *Bull. Soc. Chim. Belg.*, 36, 1927, p. 64.

([2]) Séance du 3 février 1930.

([3]) *Comptes rendus*, 190, 1930, p. 91.

n'est pas une raie du plomb; elle est accompagnée aussi d'autres raies du mercure.

2° Les raies de l'hélium obtenues sont très faibles (¹).

3° L'identification du doublet dans la région 2428,8-2428 ne peut être faite que par comparaison avec d'autres spectres d'échantillons-étalons de plomb aurifère, car, pour de très faibles teneurs en or, il y a déplacement du doublet vers la raie du plomb.

Il se peut aussi que les analyses de MM. Fabry et Dureuil n'aient pas porté sur des plombs provenant de toitures assez anciennes; ou bien, si des échantillons ont été prélevés à l'Observatoire de Paris, ils ont pu être pris là où la surface avait été grattée par moi, car je crois que j'ai gratté pour des analyses tout ce qu'il y avait d'accessible sur la corniche et sur quelques autres petites toitures. Si l'on veut chercher du plomb à l'Observatoire, il faut le prendre là où l'accès est très difficile.

Bien que ces spectres doivent être obtenus de nouveau dans d'autres laboratoires, je me permets de faire ces quelques remarques pour établir certains points qui pourront expliquer pourquoi *mes résultats sont contestés par M. Fabry*.

Quand j'ai travaillé à l'Institut d'Optique, j'ai eu le concours de M. Dureuil surtout pour la prise de ces spectres, de la lecture et de l'interprétation desquels je prends absolument la responsabilité. Ces résultats sont la conséquence immédiate de la radioactivité du plomb qui a été vérifiée aussi à Amsterdam, au Laboratoire de Chimie physique, par le professeur Smits et ses assistants (*Amsterdam, Proceedings of the Section of Sciences*, 32, v, 1929).

RADIOACTIVITÉ. — *Sur un procédé d'activation de la matière.* Note de M. G. **Reboul**, présentée par M. A. Cotton.

J'ai indiqué antérieurement (²) les conditions dans lesquelles des lames métalliques acquièrent la propriété de décharger l'électroscope et d'impressionner la plaque photographique; je me suis appliqué à déterminer l'origine de cette activité.

I. L'activité acquise décroît avec le temps suivant une loi exponentielle

(¹) Spectres pris à l'aide de tubes munis d'un petit réservoir contenant la poudre de Pb, qui était chauffée, afin de dégager les gaz y contenus; ou bien de tubes à électrodes de Pb. Temps de pose très long, de 1 à 2 heures.

(²) *Comptes rendus*, 189, 1929, p. 1256.

fort nette; les apparences sont les mêmes que celles d'une radioactivité induite, on peut donc calculer la *constante radioactive* et déterminer *la vie moyenne* des lames après leur activation. Ainsi dans l'exemple que j'ai cité d'une lame de plomb activée sous une tension de 20000 volts, on trouve pour la constante $\lambda = 0,0003$ sec^{-1} et une vie moyenne de 40 minutes.

On peut ainsi déterminer le coefficient d'absorption du rayonnement par l'aluminium, on trouve des valeurs voisines de 200 cm^{-1} s'abaissant jusqu'à 50 cm^{-1} quand l'épaisseur de l'aluminium interposé augmente de $0^{mm},01$ à $0^{mm},1$; ces résultats montrent la nature complexe du rayonnement, dont les caractères apparaissent indépendants des conditions de l'activation, ainsi que l'ont fait voir les expériences suivantes.

II. Si, avec une même cellule, on active à diverses reprises une lame de métal, l'activité initiale a des valeurs différentes, mais sa diminution avec le temps a toujours même allure et donne les mêmes valeurs que plus haut pour la constante radioactive et pour la vie moyenne; les coefficients d'absorption par l'aluminium étant aussi du même ordre de grandeur.

Quand on change les conditions de fonctionnement ou la nature de la cellule, on trouve que l'activité initiale est d'autant plus grande que la tension employée est plus élevée, mais l'on obtient encore les mêmes constantes de variation en fonction du temps.

Enfin si l'on opère avec des lames de nature différente (plomb, cuivre, zinc, laiton, aluminium, etc.), le coefficient d'absorption, la constante radioactive et la vie moyenne ne changent pas de manière nette; les valeurs trouvées pour λ oscillent entre 0,0003 et 0,00028 et la vie moyenne varie de 39 à 41 minutes pendant les premières heures.

III. Les caractères de l'activité des lames sont donc indépendants de leur nature, de la composition des cellules et des conditions de leur fonctionnement, l'origine de l'activité doit être par conséquent cherchée dans la seule chose qui ne change point dans les diverses expériences, c'est-à-dire dans le milieu environnant : il paraît probable que les centres électrisés, produits dans le gaz par le fonctionnement des cellules, servent de noyaux de condensation à une émanation qui préexiste dans le milieu environnant et vient se déposer sur les lames métalliques; le processus serait analogue à celui de la précipitation par l'aigrette électrique des poussières radioactives en suspension dans l'atmosphère (méthode de Sella).

Le laboratoire dans lequel sont faites les expériences n'a jamais été utilisé pour l'étude de substances radioactives, d'autre part une origine uniquement atmosphérique paraît insuffisante pour expliquer l'abondance relative de cette émanation supposée.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Sur un nouveau procédé de microdosage de l'ion calcium.* Note de MM. **A. Astruc**, **M. Mousseron** et M[lle] **N. Bouissou**, présentée par M. Marcel Delépine.

Les méthodes employées pour doser de faibles proportions d'ion calcium ne sont pas encore parfaitement au point. Elles sont basées sur la formation de composés insolubles, tels l'oxalate de calcium ou le tungstate de calcium. C'est ce dernier que nous avons étudié, ce qui nous a permis, avec quelques précautions, d'établir un procédé de microdosage du calcium parfaitement exact et réalisable dans tous les laboratoires.

On sait que le tungstate de calcium, obtenu par précipitation d'un sel soluble de calcium par une solution de tungstate de sodium, est insoluble dans l'eau et qu'il est transformé, à froid, par les acides chlorhydrique, nitrique, sulfurique, en un précipité blanc amorphe d'acide tungstique hydraté, lequel, par ébullition, se modifie en un précipité jaune d'acide tungstique anhydre soluble dans les alcalis (l'acide phosphorique se comporterait d'une façon un peu particulière en donnant un phosphotungstate complexe, soluble dans un excès d'acide).

D'autre part certains réducteurs transforment les tungstates en composés dérivant de l'oxyde W^2O^5, possédant une coloration parfois jaunâtre (avec le chlorure stanneux) ou bleue virant au brun (avec l'hydrogène naissant par action de l'acide phosphorique sur une lame de zinc platinée), ou enfin nettement bleue (avec le chlorure titaneux).

C'est le chlorure titaneux que nous avons employé dans nos recherches, et la coloration bleue obtenue, stabilisée par $0^{cm^3},3$ de ClH N pour 10^{cm^3}, a été examinée au colorimètre de Duboscq, comparativement avec la coloration fournie par une solution de concentration étalon et par la méthode ordinaire.

La solution de chlorure titaneux est facilement oxydable; il faut la renouveler pour chaque série de dosages de tungstate : on dilue la solution commerciale fortement colorée et contenant 12 pour 100 de Cl^3Ti, au centième environ; on titre cette dernière par une solution chlorhydrique de sel ferrique à 1^{mg} de Fe par centimètre cube, en présence de sulfocyanure et après addition de carbonate acide de sodium, de façon à avoir un milieu non oxydant; on opère rapidement; la solution de Cl^3Ti est ensuite convenablement étendue pour que 1^{cm^3} réduise environ 2^{mg} de fer à l'état ferrique.

Avec ce réactif réducteur, on obtient facilement la coloration bleue des

dérivés tungstiques; on peut ainsi déterminer la proportion de tungstène du tungstate de calcium et, partant, la quantité de ce dernier.

Pratiquement, le microdosage est réalisé comme il suit :

Dans un tube à centrifugeuse, placer la solution de sel de calcium, représentant de $0^{mm},1$ à $1^{mm},5$ de Ca; étendre d'eau distillée à 7^{cm^3}; ajouter 1^{cm^3} de solution de tungstate de sodium à 5 pour 100; agiter sans racler les parois et porter une heure au bain-marie vers 70-80°. Après quelques minutes de chauffage, on observe l'apparition d'un louche, puis le précipité de tungstate de calcium devient cristallin et se dépose dans le fond du tube; centrifuger; laver le précipité deux ou trois fois, avec 5^{cm^3} d'eau distillée (la dernière eau de lavage ne fournit aucune coloration bleue par le réactif titaneux, preuve du lavage suffisant et de l'insolubilité absolue du tungstate de calcium).

Le tungstate de calcium ainsi obtenu est transformé en acide tungstique par traitement avec trois gouttes d'acide chlorhydrique concentré versées sur le culot de centrifugation lavé, puis addition de $0^{cm^3},5$ d'eau distillée; porter au bain-marie bouillant pendant 15 minutes; l'acide tungstique hydraté blanc donne l'anhydride jaune insoluble, pendant que le calcium passe en solution chlorhydrique (observons que l'acide phosphorique ne peut être utilisé, parce qu'il formerait, par la suite, du phosphate de titane insoluble).

Le précipité d'acide tungstique est lavé par centrifugation avec 2^{cm^3} ClH N, pour éliminer les dernières traces de calcium; puis le résidu est dissous à chaud dans 2^{cm^3} de potasse pure à 20 pour 100. La dissolution effectuée, neutraliser exactement par l'acide chlorhydrique en présence de tournesol; ajouter $0^{cm^3},3$ de ClH N; porter à 10^{cm^3} avec de l'eau distillée et ajouter $0^{cm^3},3$ de réactif titaneux. Procéder au dosage colorimétrique de la solution bleue obtenue, par comparaison avec la solution étalon (les deux solutions doivent posséder une intensité de coloration assez voisine, pour diminuer l'erreur systématique du dosage).

De la quantité d'acide tungstique trouvé, il est facile de déduire la proportion de calcium du tungstate et de la substance mise en œuvre.

Nous avons vérifié l'exactitude de la méthode sur une solution de chlorure de calcium titrée à $0^{mg},32$ de Ca par centimètre cube :

Ca mis en expérience.	Ca trouvé.
mg	mg
0,16	0,145
0,32	0,33
0,64	0,63
0,96	0,93
1,28	1,26

Le microdosage de l'ion Ca que nous proposons est rapide, pratique et exact. Il sera appliqué non seulement au dosage du calcium isolé, mais aussi au dosage du calcium en présence de fer et de phosphore; également en présence de fer, de phosphore et de matières organiques (sang, lait, etc.).

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur une érythrite éthylénique.* Note de MM. **Lespieau** et **Bourguel**, présentée par M. C. Matignon.

L'un de nous ayant obtenu une érythrite acétylénique

$$CH^2OH.CHOH.C\equiv C.CHOH.CH^2OH,$$

et son éther diméthylique biprimaire (*Comptes rendus*, 173, 1921, p. 1367) nous avons cherché à en dériver par hydrogénation modérée les composés éthyléniques correspondants.

Comme il fallait opérer à froid, l'emploi du palladium colloïdal était indiqué, d'autant plus que ce catalyseur, convenablement employé, ne conduisant qu'au composé cis (Bourguel) on n'a pas à craindre avec lui la production simultanée de deux isomères, dont la séparation serait probablement fort difficile.

$8^g,92$ de l'érythrite acétylénique pure, fondant à 114°, ont été dissous dans 300^g d'eau et additionnés d'une solution amidonnée de palladium colloïdal renfermant 3^{cg} de métal. Le tout a été agité dans une atmosphère d'hydrogène fourni par un flacon de Deville, ce qui permettait de mesurer la vitesse d'absorption. Au début cette vitesse était de 3300^{cm^3} à l'heure, elle monta rapidement à 3900 et s'y maintint pour tomber très brusquement, et devenir négligeable quand il se fut fixé deux atomes de gaz, soit 1450^{cm^3}.

On a alors additionné le liquide d'alcool méthylique, filtré et concentré à 100° dans le vide de la trompe à eau. Par refroidissement le résidu a cristallisé. On redissout la masse cristalline dans de l'acide acétique et abandonne dans le vide en présence de potasse. Quand il ne reste plus que très peu de liquide on met sur une assiette poreuse, à la surface de laquelle, au bout de quelques heures, on ne trouve plus que des cristaux blancs fondant au tube capillaire à 80-82°. Leur analyse indique que l'on se trouve bien en présence d'une érythrite éthylénique,

$$CH^2OH.CHOH.CH=CH.CHOH.CH^2OH,$$

(trouvé pour 100 : C 48,48; H 8,17; théorie 48,61 et 8,10).

L'érythrite acétylénique employée avait été extraite d'un mélange pâteux où il y a tout lieu de penser qu'elle est accompagnée d'un isomère stérique; sa purification avait exigé le sacrifice de beaucoup de matière, aussi a-t-on essayé l'hydrogénation du produit brut. Elle s'est montrée bien

moins facile, parce que le mélange renfermait des impuretés qui paralysaient rapidement le catalyseur. On pouvait remédier à cet inconvénient en ajoutant progressivement de nouvelles quantités de ce dernier, mais malgré cela la vitesse est devenue pratiquement nulle quand on a eu fixé sensiblement deux atomes d'hydrogène, ce qui est en faveur de l'hypothèse de la présence de deux érythrites isomériques dans le mélange utilisé. Le produit obtenu s'est refusé à cristalliser.

Au point de vue stéréochimique il faut y voir un corps cis inactif par nature sur la lumière polarisée.

On a ensuite hydrogéné l'éther diméthylique

$$CH^3OCH^2.CHOH.C \equiv C.CHOH.CH^2OCH^3.$$

Celui-ci bouillait bien, mais comme il provenait de la même source que le mélange des deux érythrites mentionné ci-dessus, il devait probablement renfermer aussi deux stéréoisomères. Seulement ici la distillation avait éliminé les anticatalyseurs, aussi l'hydrogénation a-t-elle été aisée; elle s'est encore arrêtée brusquement après la fixation de deux atomes d'hydrogène : 27^g de liquide ont absorbé ainsi 3780^{cm^3} de gaz, en présence de 3^{cg} de palladium.

Le liquide résultant additionné d'alcool, puis filtré, a été distillé. L'éther éthylénique a passé alors à 151° sous 5^{mm} et à 145° sous 3^{mm}. On lui a trouvé une réfraction moléculaire de 44,85 la théorie voulant 45,01. A 23° densité 1,0969, indice D 1,471. On y a dosé pour 100, C 54,29; H 9,15, nombres correspondant à la formule

$$CH^3OCH^2.CHOH.CH = CH.CHOH.CH^2OCH^3.$$

Voici les mesures faites sur ces vitesses d'hydrogénation :

Érythrite.		Éther diméthylique.	
Volume fixé.	Vitesse.	Volume fixé.	Vitesse.
cm³	l	cm³	l
1229	3,900	3250	3,900
1355	3,900	3525	3,900
1385	4,200	3660	4,050
1420	3,900	3750	3,000
1445	1,500	3770	1,000
1450	0,300	3780	0,300
Après	Négligeable	Après	Négligeable

En réalité la théorie n'exigerait que $1^l,37$ dans le premier cas, et $3^l,73$ dans le second, au lieu de $1^l,45$ et $3^l,78$, mais l'expérience répétée sur de

nombreux cas d'hydrogénation a montré qu'on absorbe toujours un léger excès d'hydrogène, soit que le palladium en retienne, soit pour toute autre cause. Cet excès conduirait pour le premier cas à $1^l,46$ environ et $3^l,78$ pour le second.

GÉOLOGIE. — *Sur l'âge des couches à Orbitolines du nord de la province d'Alger.* Note de M. **Louis Glangeaud.**

Les Atlas de Blida et du Bou-Maad, situés au sud de la Mitidja et du bassin de Marceau, appartiennent à une zone stratigraphique et tectonique que j'ai appelée zone II ou du géosynclinal de Blida. Les assises d'âge crétacé y présentent plusieurs niveaux calcaires superposés qui ont été attribués au Cénomanien par Ficheur dans son remarquable travail sur l'Atlas de Blida (¹). Cet auteur séparait par des contacts anormaux les calcaires dits *cénomaniens* des couches situées au contact. Dans l'Atlas du Bou-Maad, le Crétacé n'avait fait l'objet d'aucune étude précise.

Les fossiles que j'ai recueillis dans le massif du Bou-Maad me permettent d'expliquer cette superposition de plusieurs niveaux calcaires par la réapparition de faciès analogues dans une série stratigraphique normale, sans faire intervenir de recouvrements anormaux. De même, dans l'Atlas de Blida, la découverte d'*Orbitolina lenticularis* Blum, que j'ai rencontrée dans le niveau calcaire le plus inférieur, prouve que les calcaires dits *cénomaniens* de la base de cette série sont en réalité d'âge aptien ou albien inférieur.

Il est impossible de préciser que les calcaires à *Orbitolina lenticulatis* sont d'âge aptien supérieur. En effet ceux-ci surmontent des couches qui ont fourni dans le Bou-Maad : *Parahoplites flexisulcatus* d'Orb., *Costidiscus recticostatus* d'Orb., *Lytoceras* cf. *Liebigi* Opp. (déterminations confirmées par M. Roch). Ces calcaires peuvent être rapportés à l'Aptien inférieur (Bédoulien). Au-dessus de ces calcaires bédouliens apparaissent des lumachelles et des calcaires gréseux à Encrines et à *Orbitolina lenticularis* Blum (détermination confirmée par M. Douvillé), qui avaient été attribués au Cénomanien. Les couches à Orbitolines sont recouvertes par l'Albien schisto-gréseux avec *Parahoplites Milletianus* d'Orb.. Comme elles sont comprises entre le Bédoulien (zone I de M. Jacob)

(¹) E. Ficheur, *Les plissements du Massif de Blida* (*Bull. Soc. géol. de Fr.*, 3ᵉ série, 24, 1896, p. 982 à 1041).

et l'Albien inférieur (zone III de M. Jacob), on peut admettre qu'elles sont d'âge aptien supérieur (zone II de M. Jacob).

Des couches analogues transgressives sur le Lias du Zaccar contiennent *Parahoplites Uhligi* Anthula (détermination de M. Roch). On a donc là une série continue et normale entre le Bédoulien et le Vraconnien fossilifère (zone VI de M. Jacob) où il est possible de reconnaître sans trop de difficultés les zones décrites par M. Jacob.

Trois niveaux principalement calcaires sont superposés dans la zone du géosynclinal de Blida. Le premier est aptien, le deuxième vraconnien, le troisième cénomanien. Une partie des contacts anormaux, que Ficheur a été obligé de mettre à la base des couches de calcaires dans la détermination stratigraphique était inexacte, me paraît devoir disparaître.

Au Nord du géosynclinal de Blida s'étend la zone que j'ai appelée zone I ou des massifs anciens. Dans cette dernière zone j'ai montré que le Flysch schisto-gréseux, qui était autrefois attribué au Danien de l'Éocène supérieur, était d'âge albo-aptien (1). A la base de ce Flysch on observe en plusieurs points des couches à *Orbitolina lenticularis*, de 10^{m} environ d'épaisseur, qui sont recouvertes par les grès et schistes de l'Albien avec *Douvilleiceras Bigoureti* Seunes. Ces couches à Orbitolines de la zone I reposent directement sur le Primaire ou le Trias. Il paraît possible de les assimiler à celles de l'Aptien supérieur de la zone II.

L'Aptien présente dans ces deux zones des faciès différents au point de vue pétrographique. Dans la région littorale les couches à Orbitolines sont représentées par des grès calcaires roux, très ferrugineux, riches en débris organiques; tandis que dans la zone II les couches de l'Aptien supérieur sont des marno-calcaires clairs, accompagnés de lumachelle. Ces deux faciès de l'Aptien présentent le caractère commun d'être peu profonds. La différence entre les deux zones, très marquée pour les autres étages du Crétacé s'atténue donc un peu à l'Aptien où les faciès néritiques prennent une grande extension. J'ai pu suivre ces faciès néritiques depuis le Dahra jusqu'aux environs de Bougie (2) sur plus de 360^{km}. Cette augmentation de surface des faciès néritiques à l'Aptien paraît être un fait d'ordre général en Algérie et en Tunisie. Elle a été signalée par Ficheur, Flamand, Pervinquière, Thomas, MM. Blayac, Dalloni, Joleaud et Savornin dans les régions qu'ils ont étudiées.

---

(1) Louis Glangeaud, *Sur la présence de l'Aptien dans la région littorale de la province d'Alger* (*Comptes rendus*, **181**, 1925, p. 249).

(2) Louis Glangeaud, *loc. cit.*

GÉOLOGIE. — *Sur l'extension verticale du genre* Spiriferina *au Maroc.* Note de M. **Henri Termier**, présentée par M. Pierre Termier.

Dans son beau Mémoire sur les Spiriférines, M. G. Corroy [1], qui a eu en mains une énorme quantité d'échantillons français, arrête à la première zone de l'Aalénien l'extension verticale de cet intéressant groupe de Brachiopodes en Europe. Je crois pouvoir affirmer que les Spiriférines ont eu au Maroc une longévité plus grande et je fonde cette opinion sur l'examen de deux gisements particulièrement typiques.

I. Le premier se trouve sur le Causse préatlasique des Beni M'guild à environ 15^{km} au sud d'Azrou et à 10^{km} au sud-ouest du Djebel Hébri. On observe à 300^{m} à l'est de la maison forestière d'*Aïn Kahla* des bancs de calcaire qui rappellent le *ciret* du Mont d'Or lyonnais et qui sont très riches en coquilles partiellement silicifiées. J'ai recueilli en ce point des Spiriférines associées à des fossiles connus surtout dans le Bajocien. Pour être fixé sur le niveau exact de cette formation je me suis adressé à d'autres paléontologistes et voici le résultat de ces différentes études.

Les Spiriférines ont été déterminées par M. Corroy comme *Spiriferina Walcotti* var. *Nuvoteri* Daw.; un petit lot envoyé à M. Gardet lui a permis de reconnaître les espèces suivantes : *Terebratula ventricosa* Hartm. (in Zieten, Bajocien), *T. gr. perovalis* Sow. (zone à Murch.), *Plagiostoma Annoni* Mérian (Dogger); un autre lot soumis à M. Dubar lui a donné : *T.* cf. *ventricosa* Hart., *T. perovalis* Sow. var. *Kleini* Lmk (Aal. sup.); *Rhynchonella* cf. *lotharingica* Haas (Aal. moy. et sup.), *Plagiostoma semicircularis* Goldf. (Aal. moy. et sup.), Spicules d'éponges (tétractinellides).

« Certains exemplaires de *T.* cf. *ventricosa* sont apparentés à *T. insignis* Schl. Le crochet, très fort, rappelle *T. ventricosa* Daw., la forme est très bombée, beaucoup plus que celle de tous les échantillons figurés. »

Enfin je compléterai cette liste par *Trigonia* cf. *duplicata* Sow. et par un *Ctenostreon* à côtes bifides, probablement nov. sp.

Non loin de ces couches à Brachiopodes, à 100^{m} au nord de la maison forestière, existent des bancs de calcaire marneux à silex qui paraissent bien le prolongement des premiers ou qui ne leur sont supérieurs que de 3 ou 4^{m}, et où fourmillent des tiges de *Pentacrinus bajocencis* d'Orb. Cette

[1] G. Corroy, *Les Spiriféridés du Lias européen et principalement du Lias de Lorraine et d'Alsace* (*Annales de Paléontologie*, **16**, 1927, p. 34-35).

détermination a été confirmée par MM. Gardet et Dom Valette. De tout ceci résulte que l'affleurement d'Aïn Kahla appartient au Bajocien ou tout au moins à un Aalénien déjà élevé, et que la *Spiriferina Walcotti* qui en France s'éteint à la fin du Charmouthien se rencontre beaucoup plus haut dans le Maroc Central.

II. Le défilé de Tsiouant (feuille *Reggou* au $\frac{1}{100000}$ n^{os} 6 et 7) offre une magnifique coupe naturelle entre les mines de sel et le Ksar proprement dit. Du Nord-Ouest au Sud-Est on observe la succession suivante : 1° Trias; 2° Lias inférieur ou moyen en gros bancs; 3° au point 629, 1-308, 5, 15^{m} de marno-calcaires qui m'ont fourni les espèces suivantes :

Spiriferina alpina var. *Falloti* G. Corroy (détermination Corroy) associée à *Plagiostoma cardiiformis* Sow. (Dogger), *Pleuromya rhenana* Schlipp (Dogger), *Ctenostreon Wrighti* Bayle (Baj.), *Rhynchonella tetraedra* Sow. (Baj.), *Isastrea bernardiana* d'Orb. (Baj.). Ces cinq espèces ont été déterminées par M. Gardet. J'y ajouterai : *Pholadomya Murchisoni* Sow. (Dogger), *Plagiostoma Annonii* Merian (Dogger), *Ctenostreon* cf. *pectiniforme* Schl. (Dog.), *Chlamys* cf. *Dewalquei* Oppel, *Entolium* cf. *clathratus* Rœmer, *Lucina Bellona*. d'Orb., *Belemnites* sp. Une telle faune ne prouve pas absolument l'âge bajocien de ces couches marno-calcaires puisqu'elle ne contient pas de Céphalopodes, mais c'est celle que j'ai rencontrée un peu partout dans le Moyen Atlas au-dessus du Toarcien bien caractérisé (Ammonites pyriteuses) et même de l'Aalénien quand il existe.

Comme on le voit, il est difficile d'échapper à la conclusion que les Spiriférines ont persisté dans le Maroc plus longtemps que dans le Nord-Ouest de l'Europe.

GÉOLOGIE. — *Sur la présence du Cuivre dans le Soudan occidental français.* Note de M. **Raymond Furon**, présentée par M. L. Cayeux

Au cours d'une mission géologique dans le cercle de Nioro (janvier 1929), j'ai découvert l'existence du cuivre dans la région de Sirakoro.

La région étudiée est située à l'est de Nioro, dans le pays Diawara. On y rencontre des terrains très variés : roches éruptives (série monzonite quartzifère-gabbro-diabase), schistes et pélites, grès violets tendres et calcaires marmorisés.

Bien que les contacts soient rarement visibles, on peut donner la succession stratigraphique suivante, à l'ouest de Sirakoro :

4. Diabases (pointements et coulées).
3. Calcaires marmorisés, passant latéralement à des grès blancs, plus ou moins calcarifères.
2. Grès tendres, violacés.
1. Schistes et pélites.

Toute cette zone, depuis Tourougoumbé jusqu'à Yéréré, est fortement minéralisée et de grands amas de magnétite sont visibles au contact des calcaires et des diabases.

A l'ouest de Sirakoro, les calcaires marmorisés disparaissent pour faire place à des grès blancs, calcarifères au sommet. C'est dans un ravin de cette région, entre Sirakoro et Séï, que j'ai découvert des bancs de grès fortement imprégnés de sels de cuivre : malachite et chrysocolle.

Les grès, localement plissés et disloqués par de petites failles, ont un pendage de 30° vers le Sud-Est; ils constituent des collines recouvertes de blocs de magnétite et de diabase. Ayant exécuté quelques fouilles sommaires, j'ai pu constater la présence de trois bancs, au moins, de grès cuprifères, mesurant ensemble environ 1^m. Un échantillon moyen (du banc inférieur) analysé par M. C. Boulanger contient près de 12 pour 100 de cuivre métal. Cette découverte est, à ma connaissance, la première qui soit faite du cuivre dans le Soudan occidental français.

BOTANIQUE. — *Sur la formation des zoosporanges et la germination des spores chez un* Saprolegnia, *en cultures sur milieux nutritifs additionnés de rouge neutre.* Note de M. **Guilliermond**, présentée par M. Molliard.

Dans une Note antérieure [1], nous avons exposé les résultats de nos essais de culture d'un *Saprolegnia* sur bouillon de peptone additionné de rouge neutre et nous avons montré que jusqu'à une dose de 5^{mg} pour 100 du colorant, le Champignon se développe aussi bien que dans les cultures témoins, tout en accumulant le rouge neutre dans son vacuome qui, pendant toute sa croissance, apparaît fortement coloré. Toutefois le mycelium obtenu dans ces conditions restait constamment stérile, comme d'ailleurs dans les cultures témoins et il ne nous avait pas été possible d'obtenir la formation des zoosporanges. Le *Saprolegnia* que nous avons cultivé ne donne, en effet, de zoosporanges en milieu liquide, que lorsqu'on place en inanition

[1] *Comptes rendus*, 188, 1929, p. 1621.

un mycélium jeune et bien nourri provenant d'une culture sur bouillon de peptone et, même dans ces conditions, les zoosporanges n'apparaissent que difficilement et au bout de huit jours environ. Au contraire, le Champignon sporule abondamment et rapidement sur bouillon de soja gélosé, milieu qui ne nous paraissait pas favorable à sa coloration vitale et que nous n'avions pas essayé.

Depuis, M. Skupienski (¹) a communiqué des résultats de même ordre que les nôtres, obtenus sur un Myxomycète, le *Didymium nigripes*. En cultivant ce Champignon sur un bouillon de carotte et de pomme de terre gélosé et additionné de rouge neutre, cet auteur a réussi a obtenir son développement complet jusqu'à la sporulation et a constaté qu'à toutes les phases de sa croissance, le Champignon accumulait le rouge neutre dans ses vacuoles. Ceci nous a donné l'idée d'appliquer à notre *Saprolegnia* une méthode semblable dans le but d'obtenir sa sporulation. Ce Champignon a été cultivé sur bouillon de Soja gélosé et additionné de 1^{mg} pour 100 de rouge neutre dans des boîtes de Petri.

On peut étudier tous les stades de leur germination, en prélevant les zoosporanges ainsi obtenus et en les ensemençant en chambre humide, sur gouttelettes pendantes de bouillon de Soja additionné de rouge neutre. La germination s'effectue d'uue manière un peu anormale par suite du milieu solide où les zoosporanges sont placés. Le plus souvent, en effet, les spores germent directement dans les zoosporanges sans passer par le stade zoospore. Le premier signe de leur germination consiste en leur gonflement accompagné de l'hydratation de leurs petites vacuoles qui confluent pour former une unique et très grosse vacuole occupant la presque totalité de la spore et refoulant à la périphérie le noyau et le cytoplasme. Cette vacuole offre une teinte rouge diffuse avec de gros corpuscules plus fortement colorés. Bientôt la spore donne naissance à un tube germinatif, qui, après avoir perforé la paroi du zoosporange, s'allonge et se ramifie. Le tube germinatif apparaît d'abord comme une petite hernie de la spore occupée par le noyau et un cytoplasme très dense; mais très rapidement, dès le début de la croissance du tube, on voit apparaître dans le cytoplasme de petites vacuoles teintes en rose et renfermant souvent des corpuscules plus fortement colorés qui ne montrent aucune relation avec la grosse vacuole de la spore : celle-ci reste dans la spore sans subir aucune modification ou parfois se prolonge un peu à la base du tube germinatif, entraîné dans celui-ci

(¹) *Acta Societatis botanicorum Poloniæ*, 6, 1929, p. 203.

avec le cytoplasme. Les petites vacuoles du tube germinatif s'accroissent rapidement, puis se fusionnent pour former de grosses vacuoles, occupant la majeure partie du tube, tandis que, à l'extrémité de ce dernier, on en voit se former de nouvelles, très petites.

Ainsi notre *Saprolegnia* parcourt tout son développement en milieu nutritif, additionné de rouge neutre, depuis la germination de la spore jusqu'à la formation du zoosporange, et pendant toutes les phases de sa croissance, il accumule le rouge neutre dans ses vacuoles. Seule, la reproduction sexuelle n'a pu être réalisée, mais celle-ci n'a jamais été obtenue dans aucune condition depuis cinq ans que nous cultivons ce Champignon dans notre laboratoire, ce qui laisse penser qu'il s'agit d'une forme devenue agame. Ces résultats, joints à ceux de M. Skupienski sur le *Didymium nigripes*, et que nous avons pu nous-même vérifier en cultivant dans du milieu additionné de rouge neutre une culture obligeamment envoyée par cet auteur, démontrent donc que le rouge neutre est un colorant extrêmement peu toxique et d'un usage précieux pour l'étude des vacuoles.

Cultivé dans ces conditions et à 25°, le *Saprolegnia*, au bout de 24 heures, forme au milieu de la plaque de gélose une végétation ronde constituée par de fins filaments s'irradiant autour du point d'ensemencement. Cette végétation offre une teinte rouge très marquée qui la fait ressortir dans le substratum qui, au contraire, tend à se décolorer. Comme dans nos cultures antérieures en milieu liquide, le Champignon sélectionne donc le rouge neutre. Au bout de 48 heures environ, la végétation envahit tout le substratum. Observée alors au microscope, à un très faible grossissement, la plaque de gélose montre un mycélium constitué par de nombreux filaments colorés dont les extrémités sont occupées par des renflements en voie de se transformer en zoosporanges ou par des zoosporanges entièrement formés. Des fragments de ce mycélium prélevés et examinés à un fort grossissement permettent d'observer les différentes phases de la formation des zoosporanges et l'évolution que subit, pendant ce phénomène, le vacuome qui apparaît d'abord constitué par de nombreuses vacuoles teintes en rose avec à leur intérieur des corpuscules plus colorés. Au début de leur formation, les spores montrent un noyau occupant le centre et un cytoplasme rempli de petites vacuoles à contenu colloïdal très condensé, uniformément et fortement coloré en rouge. Les zoospores peuvent, à la longue, se gonfler et commencer à germer dans le milieu où elles se sont formées.

CHIMIE VÉGÉTALE. — *L'oroboside, nouveau glucoside hydrolysable par l'émulsine, retiré de l'*Orobus tuberosus *L. et ses produits d'hydrolyse : glucose et orobol.* Note de MM. **M. Bridel** et **C. Charaux**, présentée par M. L. Mangin.

Dans une Note récente sur l'orobérol, chromogène de l'*Orobus tuberosus* L., nous avons indiqué qu'au cours de la préparation de ce principe, on obtenait, à l'état cristallisé, le glucoside hydrolysable par l'émulsine, l'oroboside (1).

Cristallisé dans l'alcool à 40° l'oroboside se présente sous la forme de prismes microcopiques, assez larges et isolés. Sa couleur est jaune pâle. Il fond instantanément au bloc Maquenne à + 220°-221°. Il est lévogyre. Son pouvoir rotatoire a été déterminé dans la pyridine, le seul dissolvant qui donne une solution assez concentrée :

$$\alpha_D = -61°,29; \quad [\alpha]_{5461} = -76°,62 \quad \text{(pour le produit anhydre).}$$

L'oroboside présente plusieurs réactions colorées, notamment avec la soude très diluée, dans laquelle il se dissout en donnant une solution jaune virant très rapidement, par oxydation à l'air, au rouge cerise intense.

Il est très rapidement oxydé par le sel purpuréo-cobaltique avec formation d'un précipité violet noir abondant.

Il est réducteur : 1^g réduit comme $0^g,470$ de glucose.

Par hydrolyse sulfurique, il fournit 39,77 pour 100 d'un sucre réducteur qui a été obtenu à l'état cristallisé et identifié comme glucose par sa forme cristalline et son pouvoir rotatoire, et 64,46 pour 100 d'un produit non glucidique, insoluble dans l'eau, cristallisé, l'orobol.

A cause de sa solubilité très faible dans l'eau (1^g dans 10^l d'eau environ), l'hydrolyse de l'oroboside par l'émulsine est excessivement lente.

En 79 jours, à + 30°, en faisant agir $0^g,50$ d'émulsine sur $1^g,2864$ d'oroboside anhydre en suspension dans 100^{cm^3} d'eau toluénée, on a obtenu 35,75 pour 100 de glucose, ce qui correspond à l'hydrolyse de 90 pour 100 de l'oroboside mis en œuvre. Le glucose a été obtenu à l'état cristallisé, ainsi que le produit non glucidique qui est identique à l'orobol obtenu par hydrolyse acide.

---

(1) M. Bridel et C. Charaux, *Recherches sur les variations de coloration des plantes au cours de leur dessiccation. Sur un nouveau chromogène, l'orobérol, retiré de l'*Orobus tuberosus *L.* (*Comptes rendus*, **190**, 1930, p. 202).

L'*orobol*, cristallisé dans l'acide acétique au demi se présente comme un produit floconneux, d'un jaune pâle, un peu plus vif que celui de l'oroboside. Il est constitué par des aiguilles courbes, groupées.

Il fond, au bloc Maquenne, à $+270^{\circ},5$. Il est inactif sur la lumière polarisée.

L'orobol présente des réactions colorées qui rappellent celles de l'oroboside. Soluble dans une solution de carbonate de sodium, il est insoluble dans la solution saturée de bicarbonate de sodium : ce n'est donc pas un acide.

En solution alcoolique, il donne avec le perchlorure de fer une teinte verdâtre passant à la teinte lie de vin.

Il est oxydé par le suc glycériné de *Russula delica* avec formation d'une coloration orangée. Le sel purpuréo-cobaltique l'oxyde très rapidement avec formation d'un précipité violet noir abondant. L'orobol réduit très rapidement la solution ammoniacale d'azotate d'argent. Son pouvoir réducteur sur la solution cupro-alcaline est supérieur à celui de l'oroboside : 1^{g} réduit comme $0^{g},962$ de glucose.

L'orobol ne renferme pas de groupements méthoxylés.

Les résultats de l'analyse élémentaire et le calcul du poids moléculaire permettent de proposer la formule $C^{15}H^{10}O^{6}$:

	Trouvé.				Calculé pour $C^{15}H^{10}O^{6}$.
	I.	II.	III.	Moyenne.	
Poids moléculaire...	–	–	–	292	286
C pour 100........	62,49	62,12	62,63	62,41	62,93
H pour 100........	3,77	3,80	3,81	3,79	3,49

Comme on connaît maintenant la formule des deux produits d'hydrolyse de l'oroboside, glucose et orobol, ainsi que leurs proportions relatives, on peut établir la formule de l'oroboside

$$\underset{(286)}{C^{15}H^{10}O^{6}} + \underset{(180)}{C^{6}H^{12}O^{6}} = H^{2}O + \underset{(448)}{C^{21}H^{20}O^{11}},$$

qui concorde avec toutes les propriétés de l'oroboside, comme le montre le tableau suivant :

	Trouvé.			Calculé pour $C^{21}H^{20}O^{11}$.
	I.	II.	Moyenne.	
Poids moléculaire.....	452	459	455,5	448
Glucose pour 100......	39,77	39,21	39,49	40,17
Orobol pour 100......	64,46	64,19	64,325	63,83
C pour 100...........	55,39	55,33	55,36	56,25
H pour 100...........	4,91	4,87	4,89	4,46

Les propriétés de l'orobol permettent de le regarder comme une tétrahydroxyflavone $C^{15}H^{6}O^{2}(OH)^{4}$. Deux oxhydryles, au moins, doivent se trouver en position *ortho*, étant donnée l'oxydation facile de l'orobol.

Pour connaître la position de ces quatre oxhydryles dans la molécule de l'orobol, il faudra recourir à la fusion potassique et étudier les produits formés, polyphénols et acide-phénol.

ÉCONOMIE RURALE. — *Observation, par le diagnostic foliaire, du phénomène de remplacement physiologique mutuel de deux bases : chaux et potasse.* Note de MM. **H. Lagatu** et **L. Maume**, présentée par M. P. Viala.

La physiologie végétale ne peut manquer de tirer profit de la méthode de contrôle de l'alimentation des plantes cultivées que nous avons instituée sous le nom de *diagnostic foliaire* [1] et qui est déjà appliquée dans plusieurs stations agronomiques françaises et étrangères. En voici un exemple.

En 1929, nous avons cultivé une même variété de Pomme de terre, Royal Kidney, d'une part dans une terre très calcaire de l'École d'Agriculture de Montpellier, d'autre part dans une terre non calcaire du domaine de Malbosc, au nord de Saint-Pons (Hérault), dont le propriétaire M. Ludovic Gaujal a généreusement contribué aux frais de l'expérience. De ces champs d'essais nous ne considérerons que les parcelles n^os 1 et 11 sans engrais et les parcelles n^os 2 et 12 ayant reçu une fumure complète (sulfate d'ammoniaque, superphosphate, chlorure de potassium). Les deux feuilles situées à la base des rameaux issus directement du tubercule-mère ont été prélevées à plusieurs époques et soumises à une analyse dont nous ne retiendrons ici que les résultats en potasse K^2O et en chaux CaO.

POUR-CENT DE MATIÈRE SÈCHE DE LA FEUILLE.

1929. — *Montpellier.*

		14 mai.		3 juin.		26 juin.		9 juillet.		24 juillet.	
		N° 1.	N° 11.	N° 1.	N° 11.	N° 1.	N° 11.	N° 1.	N° 11.	N° 1.	N° 11.
Témoins	K^2O.	5,50	5,61	4,14	3,37	2,79	2,37	2,36	2,09	1,83	1,55
	CaO.	6,10	6,29	7,42	7,36	8,98	8,92	9,38	9,24	8,93	9,23
		11,60	11,90	11,56	10,73	11,77	11,29	11,74	11,33	10,76	10,78
		N° 2.	N° 12.	N° 2.	N° 12.	N° 2.	N° 12.	N° 2.	N° 12.	N° 2.	N° 12.
Fumure complète	K^2O.	5,45	5,32	4,64	3,50	3,01	2,09	2,60	2,49	1,86	1,73
	CaO.	6,40	6,52	8,02	8,17	7,89	7,94	9,41	9,34	10,05	9,12
		11,85	11,84	12,66	11,67	10,90	10,03	12,01	11,83	11,91	10,85

(1) *Comptes rendus*, 188, 1929, p. 1062.

1929. — *Malbosc.*

	29 juin.		22 juillet.		10 août.	
	N° 1.	N° 11.	N° 1.	N° 11.	N° 1.	N° 11.
Témoins K^2O	7,47	7,43	6,02	5,61	4,89	4,56
Témoins CaO	4,31	4,41	4,69	4,89	4,92	4,99
	11,78	11,84	10,71	10,50	9,81	9,55
	N° 2.	N° 12.	N° 2.	N° 12.	N° 2.	N° 12.
Fumure complète K^2O	8,14	8,39	6,41	6,57	5,53	3,26
Fumure complète CaO	4,08	4,21	4,78	4,58	4,97	5,25
	12,22	12,60	11,19	11,15	10,50	8,51

Pour une somme à peu près constante, la répartition entre la potasse et la chaux est inversée quand on passe de la feuille en station calcaire (Montpellier) à la feuille en station non calcaire (Malbosc).

La feuille de la Pomme de terre dispose donc, dans une assez large mesure, du rapport de ses teneurs en potasse et en chaux pour adapter son travail chimique, non seulement aux besoins spéciaux de chaque nouveau tissu (feuilles, tubercules), mais aussi aux ressources que lui offre chaque sol par l'intermédiaire des racines.

Il est digne de remarque que la feuille de Malbosc, prédestinée à faire son lest alcalin avec la potasse et non avec la chaux, soit *dès le début, alors que la chaux ne paraît pas manquer encore*, beaucoup plus riche en potasse que la feuille de la terre calcaire, en telle manière qu'elle puisse livrer de la potasse aux nouveaux tissus en formation et cependant mourir riche en potasse, tandis que la feuille de l'École d'Agriculture meurt très riche en chaux et pauvre en potasse.

Nous avons analysé le bouquet de petites feuilles prélevé le 14 septembre à Malbosc au sommet des tiges partiellement défeuillées.

Pour-cent de matière sèche du bouquet terminal des tiges (14 septembre).

	Témoins.		Fumure complète.	
	n° 1.	n° 11.	n° 2.	n° 12.
K^2O	3,70	3,90	3,99	4,18
CaO	2,49	2,79	3,06	3,08
	6,19	6,69	6,05	7,26

Les jeunes feuilles des sommets des tiges, vingt-sept jours avant la récolte, conservent donc encore, à Malbose, une teneur en potasse supé-

rieure à la teneur en chaux. Mais elles sont beaucoup moins riches en potasse que les feuilles de juin. Elles ne doivent d'ailleurs pas se développer; et nous constatons qu'elles portent à leur début le signe chimique de leur courte destinée, tandis que les feuilles de juin portaient à leur début la condition chimique d'une ample évolution.

CHIMIE AGRICOLE. — *Appréciation de la valeur des calcaires broyés employés en agriculture.* Note de MM. **Lenglen** et **Durier**, présentée par M. L. Cayeux.

Le problème de l'utilisation des calcaires naturels en vue de remédier à la désacidification et à la décalcification d'un grand nombre de nos terres cultivées est à juste titre l'un de ceux qui préoccupent le plus vivement le monde agricole.

Le CO^3Ca est l'un des corps le plus répandu dans la nature, mais il est aussi un de ceux qui y existent sous les formes les plus variées présentant entre elles des différences considérables, non seulement quant à leur composition chimique, mais aussi quant à leur structure physique. Ces différences de structure se traduisent toujours, ainsi que l'a constaté depuis longtemps la pratique agricole, par des différences de résistance à l'action des agents atmosphériques et aux agents dissolvants du sol et il en résulte qu'à égalité de teneur en CO^3Ca, les différentes sortes de calcaires peuvent avoir une valeur amendante très inégale. La question du choix à faire parmi les nombreuses variétés de calcaire naturel présente un énorme intérêt et à plusieurs reprises on s'est efforcé de rechercher une méthode à la fois simple et exacte permettant d'apprécier la valeur des calcaires en vue de leur utilisation comme amendement.

Parmi ces méthodes, il en est qui consistent à mesurer la vitesse d'attaque du calcaire (Houdaille et Semichon), d'autres sont basées sur la solubilité du CO^3Ca dans l'eau chargée d'acide carbonique, dont les caractéristiques ont été si remarquablement définies par Schlœsing [1].

Nous inspirant des divers travaux déjà publiés sur la question nous avons effectué sur une soixantaine d'échantillons de calcaires d'origines les plus diverses amenés à des degrés de finesse exactement déterminés, toute une série d'essais comparatifs suivant une technique spéciale que nous avons

(1) Th. Schlœsing, *Sur la dissolution du carbonate de chaux par l'acide carbonique* (*Comptes rendus*, 74, 1872, p. 1552, et 75, 1872, p. 70).

mise au point et qui est basée sur la solubilité totale du carbonate de chaux chimiquement pur obtenu par précipitation du nitrate de chaux par le bicarbonate d'ammoniaque.

Cette méthode consiste à traiter par agitation mécanique, dans un récipient approprié, une quantité de calcaire sec rigoureusement déterminée par l'expérience (correspondant à $0^g,200$ de CO^3Ca) par 500^{cm^3} d'eau chargée de CO^2 à raison d'environ $1^g,6$ par litre, à une température aussi voisine que possible de 15° pendant 2 heures et à doser dans la solution filtrée l'alcalinité par une liqueur N/10 d'acide sulfurique en présence d'orangé III.

Les résultats trouvés nous ont permis de classer les calcaires en trois groupes : durs, demi-durs et tendres, suivant leur solubilité carbonique à divers degrés de finesse déterminés. Nous donnons dans le tableau ci-après quelques-uns des résultats qui nous semblent représenter les caractéristiques moyennes de chacune des trois catégories. Ils indiquent la quantité de CO^3Ca dissous pour 100 du carbonate de chaux contenu dans les matériaux examinés :

				Grains (en millimètres).						
Nos.	Système.	Groupe.	Provenance.	1 à 2.	0,75 à 1.	0,75 à 0,50.	0,50 à 0,25.	0,25 à 0,13.	0,13 à 0,08.	Inf. à 0,08.
1..		Calcite	Manche	6,2	9,4	11,2	13,7	16,2	26,2	51,9
2..		Spath	M.-et-L.	6,9	9,4	11,9	13,7	18,7	25,6	56,2
3..	I	Carbonif. Culm.	Manche	7	11,2	13,3	16,1	21	28	63,7
4..		Stalactites	Oise	7,2	7,7	9,3	12,3	15,9	22,6	49,9
5..		Aragonite	P.-de-D.	7,7	9	10,3	13,5	16	21,2	50,2
6..	II	Oolith. Portl.	Bavière	7,9	11,1	13,1	17,1	23	30,2	74,1
7..	II	Oolith. Bath.	Sarthe	15,4	17,4	19,4	26,7	32,8	35,6	79,6
8..	II	Oolith. Baj.	Ain	19,1	20,4	21,7	24,8	28,7	32,5	73
9..	II	Crét.	Landes	23,1	24,8	29,9	37,6	39,3	44,4	78,7
10..	II	Crét. Sénon.	S.-Inf.	25,8	28,4	33,4	37,5	42,5	47,3	78,9
11..	II	Crét. Sénon.	Aisne	30	43,4	45,5	53,9	57,4	62,3	82,6
12..	II	Crét. Néoc.	Oise	31,2	39	46,7	55,2	61,8	66,3	75
13..	II	Crét. Sénon.	Oise	36,1	42,1	47,5	57,5	60,2	78,2	92,9
14..	II	Crét. Sénon.	Yonne	36,4	41	43,7	51	55	76,8	89,6
15..	II	Crét. Sénon.	E.-et-L.	49,4	50	55	61,7	61,7	74,7	81,9

On voit par ces nombres que :

1° A égalité de finesse de mouture, la solubilité carbonique d'un calcaire peut varier dans de très larges limites suivant sa structure physique; la comparaison des résultats fournis par les nos 4 et 12 qui se rapportent

à une stalactite et au calcaire dont elle provient, en constitue une preuve très nette.

2° La solubilité carbonique augmente pour un même calcaire suivant son degré de ténuité, en raison inverse de la grosseur des grains de celui-ci. Elle croît régulièrement s'il s'agit d'un calcaire tendre; s'il s'agit d'un calcaire compact plus ou moins cristallisé, elle augmente progressivement pour toutes les poudres constituées par des grains dont les dimensions varient de 2^{mm} à $0^{mm},08$; pour les grains inférieurs à $0^{mm},08$, la solubilité s'élève brusquement et le plus souvent du simple au double par rapport à celle de la poudre précédente.

D'autre part, il résulte des recherches effectuées par M. Brioux [1] sur une terre acide, à l'aide de quatre types différents de calcaires, que nous lui avions remis, qu'il y a une corrélation certaine et presque parfaite entre la solubilité carbonique des calcaires et leur action neutralisante sur le sol.

La solubilité carbonique peut donc logiquement servir de base à l'appréciation de la valeur des calcaires employés comme amendement et elle est en outre de nature à fournir des indications essentielles sur le degré de finesse auquel ils doivent être amenés suivant leur origine géologique pour donner le maximum d'efficacité.

ZOOLOGIE. — *Asymétrie viscérale et dimorphisme des spermatophores chez quelques Pagures*. Note de M. **Charles Pérez**, présentée par M. E.-L. Bouvier.

En corrélation avec leur habitat dans les coquilles turbinées de Gastéropodes dextres, les Pagures présentent, comme on sait, une asymétrie comparable à celle de ces Mollusques eux-mêmes. Dès l'extérieur cette asymétrie se manifeste par la torsion de l'abdomen et la disparition des pléopodes du côté droit, qui répond à la columelle de la coquille; à l'intérieur, elle se traduit par des différences de forme ou des déplacements topographiques des viscères (foie, glandes génitales, etc.). La région céphalothoracique de ces Crustacés est moins profondément déformée.

---

[1] Brioux et Jouis, *Corrélation entre la finesse et la solubilité carbonique des calcaires broyés et leur action neutralisante sur les sols acides* (*Comptes rendus*, **190**, 1930, p. 277).

Un contraste analogue existe pour la localisation des parasites susceptibles d'infester les Pagures. Les Bopyriens branchiaux (*Pseudione*) s'installent indifféremment à droite ou à gauche; les *Athelges*, parasites abdominaux, sont toujours à gauche : ils s'établissent, à l'état Cryptoniscien, en se cramponnant à un pléopode et restent définitivement de ce côté qui leur offre à la fois, sur l'hôte des commodités d'accrochage et, dans la coquille, un logement suffisamment spacieux. C'est aussi sur le côté gauche de l'abdomen que sont implantés les *Peltogaster;* il s'agit évidemment ici non d'un choix instinctif, déterminé par un tropisme électif de la larve, mais du résultat automatique de l'asymétrie viscérale, qui canalise en quelque sorte le germe parasitaire inoculé et le conduit du côté gauche à un point d'émergence à peu près fixe.

A cette asymétrie viscérale est encore lié, chez certains Pagures, un remarquable dimorphisme entre les spermatophores de droite et de gauche. A la sortie de chaque testicule, le sperme s'écoule en un flux continu; puis dans une certaine région du canal déférent, une série de processus compliqués substitue, à cette continuité de flux, une discontinuité périodique : une sorte de calibrage répété débite le sperme en gouttes de volume sensiblement fixe; chacune de celles-ci, façonnée en une ampoule de forme définie, est enfermée dans une coque ou capsule résistante et acquiert une embase glutineuse adhésive. Une série linéaire de spermatophores successivement formés est entraînée vers la région distale du canal déférent.

Variables suivant les genres, la forme et la taille des capsules sont fixes dans chaque espèce, et, chez beaucoup de Pagures, les spermatophores sont semblables dans les canaux déférents des deux côtés du corps : parmi les espèces examinées, il en est ainsi chez le *Diogenes pugilator* Roux, le *Clibanarius misanthropus* Risso, l'*Eupagurus cuanensis* Thompson et l'*Eup. Prideauxi* Leach.

Dans d'autres espèces au contraire, les spermatophores de droite et de gauche sont dissemblables. C'est le cas, par exemple, pour l'*Eupagurus bernhardus* (L.). Du côté droit, où le canal déférent présente un calibre plus volumineux, les spermatophores sont constitués par des capsules fusiformes allongées (*fig.* 2) et, leurs embases étant soudées bout à bout, un certain nombre de spermatophores consécutifs, le plus souvent cinq ou six, restent solidairement implantés en file sur une sorte de patin collectif. Du côté gauche, chaque spermatophore a dans l'ensemble une constitution analogue, mais la capsule est notablement plus courte et plus trapue (*fig.* 1); en outre

les embases se désarticulent les unes des autres, de sorte que les spermatophores s'individualisent ou restent tout au plus associés par deux ou par trois.

Le contraste est encore plus accentué chez les *Anapagurus*, par exemple chez l'*A. Hyndmanni* Thompson. A droite, les spermatophores qui remplissent de leur amas dense la partie distale du canal déférent, ont chacun la forme d'une petite ampoule atténuée vers son sommet (*fig.* 3) et rappellent

1, spermatophores du côté gauche, et 2, spermatophores du côté droit de l'*Eupagurus bernhardus*, × 127; 3, spermatophore du côté droit, et 4, spermatophore du côté gauche de l'*Anapagurus Hyndmanni*, × 127; 5, cinquième patte thoracique gauche de l'*A. Hyndmanni*, avec une file de spermatophores dans le tube sexuel, × 14.

beaucoup par leur structure ceux des *Eupagurus*. A gauche, au contraire, les spermatophores sont de taille relativement considérable; leur capsule trapue et acuminée rappelle la forme d'un as de pique obliquement déjeté sur son embase d'une manière asymétrique (*fig.* 4); elle est dépourvue de vésicule accessoire. Ces gros spermatophores restent, jusqu'à l'extrémité distale du conduit déférent, exactement alignés en file indienne, et on les voit aisément par transparence, jalonnant le canal éjaculateur (*fig.* 5) dans

le tube incurvé caractéristique que porte, du côté gauche, la patte de la cinquième paire. Ainsi, chez les *Anapagurus*, les spermatophores de droite et de gauche du même individu sont au moins aussi différents entre eux que les spermatophores de deux Paguriens appartenant à des genres éloignés.

Il serait désirable de contrôler, par des observations sur l'accouplement, si ce dimorphisme est lié à un emploi différent des spermatophores, ou s'il est simplement le résultat d'une dissymétrie anatomique sans répercussion fonctionnelle.

ZOOLOGIE. — *Morphologie comparée des canaux déférents de quelques Pagures.* Note de Mlle **Simone Mouchet**, présentée par M. E.-L. Bouvier.

La formation des spermatophores des Pagures à partir de la colonne de sperme qui, du testicule, passe dans le canal déférent, met en jeu divers processus. Ceux-ci sont eux-mêmes en relation avec la morphologie du canal qui peut être divisé en régions distinctes, caractérisées à la fois par leur aspect extérieur, leur structure et leur rôle physiologique. Parmi ces différentes régions, certaines sont constantes chez tous les Pagures; d'autres, au contraire, manquent chez quelques-uns, et à ce fait est liée la différence de constitution des divers spermatophores. Nous prendrons, pour distinguer les zones successives, le canal qui offre la plus grande complexité : c'est, pour les espèces étudiées, celui de *Diogenes pugilator*.

Un spermatophore se compose, typiquement, d'une ampoule de sperme, d'une coque entourant l'ampoule, d'un pédicule supportant coque et ampoule et d'une embase glutineuse. La substance engluant les spermatozoïdes, la coque, le pédicule et l'embase sont le résultat d'autant de sécrétions distinctes de la paroi interne du canal déférent. Ces sécrétions ont lieu dans des régions déterminées. D'autre part, l'individualisation des spermatophores se fait en deux temps : isolement des ampoules, puis isolement des embases et nécessite des phénomènes d'ordre mécanique qui ont lieu en des points précis. D'où la distinction, dans le canal déférent, de zones de sécrétions et de zones d'action mécanique.

On rencontre chez *Diogenes pugilator :*

I. Une partie rectiligne, irrégulière, de canal venant du testicule.

II. Une hélice dextre à tours serrés, où le canal étroit, de calibre constant, conduit le sperme en colonne continue. C'est dans les derniers tours de cette hélice qu'est sécrétée la coque enveloppant l'ampoule.

III. Une hélice sénestre où le diamètre du canal grandit. La colonne de sperme y est fragmentée en segments qui s'incurvent en arceaux et forment des ampoules par accolement de leurs extrémités.

Entre les régions II et III se trouve le point de changement de rotation des deux hélices. Ce point précis est l'endroit où s'individualisent les ampoules des spermatophores.

IV. Dans le dernier tour de la deuxième hélice, chaque ampoule acquiert un pédicule court et épais.

V. Le canal s'élargit en fuseau. Au début du fuseau, dans la partie amincie, a lieu la sécrétion des embases, sous forme d'un ruban continu supportant les pédicules individualisés.

VI. Dans la zone renflée du fuseau, on assiste à l'étirement des pédicules. Les ampoules suivent une génératrice de la lumière et, les embases glissant le long de la génératrice diamétralement opposée, les pédicules subissent un allongement correspondant à l'accroissement de diamètre.

VII. A l'extrémité distale du fuseau se produit la segmentation du ruban des embases.

VIII. Dans le tube effilé qui suit le fuseau, les spermatophores cheminent en file unique et couchés dans le canal, l'ampoule dirigée vers l'avant.

IX. Le canal s'élargit et les ampoules se disposent d'une façon quelconque, les embases restant en file indienne jusqu'à l'orifice génital. Au début de cette région les cellules glandulaires sécrètent un mucus qui emballe les spermatophores.

On voit que, par leur rôle et leur forme, neuf régions successives sont manifestes dans le canal déférent de *Diogenes pugilator*. La plupart de ces zones se retrouvent chez les autres Pagures.

Eupagurus Bernhardus, *E. Prideauxi* et *Anapagurus hyndmanni* (côté droit) ont un canal déférent présentant sept régions distinctes. Ce sont les régions numérotées I, II, III, V, VII, VIII, IX chez *Diogenes*. Il manque donc ici les zones de sécrétion et d'étirement des pédicules, c'est-à-dire la fin de la seconde hélice et le fuseau dilaté. Ici, d'ailleurs, les hélices sont remplacées par deux spirales, l'une dextre, l'autre sénestre, juxtaposées dans le même plan, ayant le même nombre de tours, trois chez *Eupagurus Bernhardus* et *E. Prideauxi*, un seul chez *Anapagurus hyndmanni*.

Il faudrait répéter pour *Eupagurus Cuanensis* ce qui vient d'être dit des autres Eupagurus, à cela près que la seconde spirale est ici remplacée par une hélice de deux tours.

Le canal déférent gauche d'*Anapagurus hyndmanni*, gardant un faible

calibre après la deuxième spirale, ne comporte pas la région IX et il se réduit donc aux zones I, II, III, V, VII, VIII.

C'est *Clibanarius misanthropus* qui a le canal le moins différencié : les régions I, II, III, V, IX y sont seules reconnaissables. Il n'y a qu'une seule hélice, la première, dextre, suivie d'une spirale sénestre et d'un tube rectiligne uniformément calibré ; pas de sécrétion de pédicule ni de segmentation d'embases. Les spermatophores restent accolés et emballés dans une sorte de mucilage spécial.

Dans les six espèces de Pagures étudiées on distingue donc, du testicule à l'orifice génital, les zones suivantes :

1° une hélice ou une spirale dextre ;

2° une hélice ou une spirale sénestre ;

3° une partie irrégulièrement contournée puis rectiligne.

Quatre dispositions sont possibles suivant que coexistent deux spirales, deux hélices, une spirale et une hélice ou une hélice et une spirale. Ces divers cas se trouvent réalisés, le premier chez *Eupagurus Bernhardus*, *Eup. Prideauxi*, *Anapagurus hyndmanni* (à droite et à gauche), le deuxième chez *Diogenes pugilator*, le troisième chez *Eupagurus Cuanensis*, le quatrième chez *Clibanarius misanthropus*.

Tout se passe comme si le canal déférent, supposé d'abord rectiligne, avait subi en un point une torsion engendrant de part et d'autre la formation de deux hélices inverses et décrivant le même nombre de tours, susceptibles, chacune indépendamment de l'autre, de s'aplatir en spirale plane. Le point d'inflexion où a lieu le changement de sens est aussi celui où se produit, chez tous les Pagures envisagés, la fragmentation de la colonne de sperme jusque-là continue. C'est là qu'a lieu le travail mécanique de distribution des spermatozoïdes en gouttelettes successives calibrées qui constitueront les ampoules des spermatophores.

La complexité de structure du spermatophore et celle des processus de sa genèse justifient la haute différenciation morphologique de l'organe qui le produit.

MORPHOLOGIE DYNAMIQUE. — *Mode de vol des Insectes et charge alaire par unité de surface.* Note de M. **P. Portier** et M^lle^ **de Rorthays**, présentée par M. E.-L. Bouvier.

Nous avons continué nos recherches sur le vol des Insectes dont les premiers résultats ont déjà été communiqués [1].

Nous essayons aujourd'hui de montrer que les divers modes de vol peuvent s'expliquer par les caractéristiques anatomo-physiologiques si variables dans les divers groupes d'Insectes.

Comme pour les Oiseaux, on peut distinguer parmi les Insectes, ceux qui pratiquent le vol *ramé* et ceux qui utilisent le vol *plané* par glissement sur l'air. Le vol ramé est de beaucoup le plus répandu. Il exige une dépense d'énergie beaucoup plus considérable que le vol plané. Nous n'avons observé ce dernier que chez certaines familles de Lépidoptères Rhopalocères.

Il semble avant tout déterminé par deux facteurs : la *charge par unité de surface des ailes* et la *vitesse de progression de l'insecte.*

Les études méthodiques sur les conditions de sustentation d'une surface plane qui se déplace dans l'air par glissement à la manière des ailes des avions sont données par la formule

$$P = K \times S \times v^2 \times \sin i$$

(P, poussée de l'air; S, surface portante en mètres carrés; v, vitesse en mètres-seconde; i, angle d'incidence; K, coefficient déterminé expérimentalement).

En prenant pour i la valeur de 7°, d'où $\sin i = 0{,}132$; pour K, la valeur 0,08, la formule devient $P = 0{,}01 \times S \times v^2$, d'où $v^2 = \sqrt{\frac{P}{S} \times 100}$.

Mais $\frac{P}{S}$ est la charge par mètre carré. Ainsi, en première approximation, on peut calculer la *vitesse minima* de translation qui *permet le planement* en multipliant par 100 la charge au mètre carré. La racine carrée du nombre obtenu représente la vitesse cherchée en mètres-seconde.

---

(1) *Comptes rendus*, 183, 1926, p. 1126.

Appliquons cette formule à un papillon chez lequel on observe le vol plané, la *Vanessa Io* par exemple. La charge par mètre carré (moyenne d'un grand nombre de mesures) est, chez cette espèce, de $0^{kg}, 244$. On a donc $v = \sqrt{24}$.

En chiffres ronds, la vitesse de translation devra donc atteindre 5 m/sec pour que le vol plané soit possible.

Des déterminations faites chez un grand nombre de Rhopalocères de nos pays nous ont montré que la vitesse de translation minima variait de 3 à 6 m/sec.

Ce sont bien là, en effet, des vitesses faibles en valeur absolue, mais suffisantes pour la modeste charge alaire qu'atteignent normalement ces papillons quand ils ont pris leur essor par le vol ramé.

Au contraire, si nous considérons un Sphingide comme le *Macroglossa stellatarum*, qui a une charge de $1^{g},500$ par mètre carré (¹), la formule nous donne $v = \sqrt{150}$, soit 12 à 13 m/sec, ce qui correspond déjà à 45^{km} à l'heure.

Enfin certains hyménoptères, comme le *Xylocopa violacea*, ont une charge qui peut dépasser 5^{kg} au mètre carré. On a alors $v = \sqrt{500}$, soit 22 à 23 m/sec ou près de 80^{km} à l'heure.

Pour ces derniers insectes, le vol plané est impossible; la vitesse de translation minima est bien trop élevée, aussi les voit-on, en effet, pratiquer uniquement un vol ramé à rythme très élevé.

Il y a donc une concordance très frappante entre les modes de vol des divers Insectes et leurs caractéristiques anatomo-physiologiques.

PHARMACODYNAMIE. — *Sur la toxicité pour les animaux de laboratoire de hautes doses d'ergostérol irradié*. Note de MM. **H. Simonnet** et **G. Tanret**, présentée par M. A. Desgrez.

La toxicité pour les animaux de laboratoire de hautes doses d'ergostérol irradié par les rayons ultraviolets a surtout été étudiée à l'étranger depuis les premiers travaux de Pfannenstiel, de Kreitmair et Moll. Bien des points restent à élucider quant au mécanisme de son action, aux doses mortelles et à leurs conditions de réalisation. Les recherches suivantes apportent une contribution à cette étude.

(¹) Certains individus de cette espèce ont même une charge de 2^{kg}, ce qui donne une vitesse voisine de 54^{km} à l'heure.

1. L'ergostérol employé doit être rigoureusement pur $[\alpha]_D = -126°$, exempt de zymostérol physiologiquement presque inactif [1]. Dissous dans l'éther et irradié, il donne naissance à une substance amorphe, très soluble dans les solvants organiques, qui seule est antirachitique et toxique, tandis que l'ergostérol qui peut en être séparé sans altération reste physiologiquement inerte. Après 45 minutes d'irradiation, la transformation atteint environ 30 pour 100 : après 6 heures, elle est presque complète : le produit a alors $[\alpha]_D = -15°$; après une vingtaine d'heures il est dextrogyre (Windaus). Nous appellerons encore provisoirement « milligramme d'ergostérol irradié » la quantité de facteur actif contenu dans un milligramme d'ergostérol mis en œuvre, quelles que soient les conditions de son irradiation.

2. Le choix du réactif animal a une importance considérable, une espèce donnée ayant une sensibilité extrêmement différente de celle des autres espèces. Après le chat (Kreitmair), le lapin est l'animal le plus sensible. Nos expériences ont porté sur une cinquantaine de lapins, mâles et adultes.

3. Après s'être assuré que l'ergostérol non irradié, pas plus que l'éther irradié plusieurs heures, n'a de toxicité propre, on a administré aux lapins par voie buccale et à la dose de 40^{mg} par jour, dissous dans du beurre de cacao, de l'ergostérol irradié 45 minutes : la mort est survenue tardivement, du 58e au 175e jour. Avec de l'ergostérol irradié 6 heures, la mort au contraire a été bien plus rapide : du 10e au 15e jour pour la dose quotidienne de 40^{mg}, du 12e au 23e pour celle de 20^{mg}. La toxicité ne disparaît pas par une chauffe de 15 minutes à 120°, 135° ou 150°.

4. La substance amorphe résultant d'une irradiation modérée (45 minutes) est, à poids égal, sensiblement aussi toxique que celle qui est produite par une longue irradiation (6 heures). Le pouvoir antirachitique mesuré sur le rat est sensiblement identique.

5. Les lésions observées sont celles qui ont déjà été relatées par les différents auteurs et tout récemment par Levaditi et Li Yuan Po. La plus constante et la plus importante est la calcification du système artériel, de l'aorte en particulier où le calcium passe de 0,10 pour 100 de l'organe frais à 4,8 et 7,7 : le système veineux et, fait remarquable, l'artère pulmonaire restent macroscopiquement indemnes de calcification. Très souvent le rein

(1) PÉNAU et TANRET, FABRE et SIMONNET. *Comptes rendus*, 188, 1929, p. 1312 et 1317.

est frappé de néphrite : la zone corticale est infiltrée de granulations calcaires, criant sous le couteau, et l'on y dose jusqu'à 5,82 pour 100 de calcium alors qu'un rein normal n'en contient que des traces. Presque constamment on a relevé des hémorragies de la muqueuse stomacale, tantôt discrètes, tantôt très étendues. Quelques animaux meurent néanmoins sans calcification apparente.

6. Par voie sous-cutanée, l'ergostérol irradié a amené la mort en un temps assez long : 48 à 64 jours (irradiation de 6 heures, 40^{mg} par jour). Dans les zones d'injection, il se forme de vastes nodules calcaires, contenant jusqu'à 7,7 pour 100 de Ca : les os sont devenus fragiles, et il y a eu migration du calcaire de l'os vers ces dépôts de nouvelle formation.

7. L'ergostérol irradié est peu toxique pour les souris, comme nous l'avons déjà montré ([1]). Il l'est encore moins pour les cobayes. Comme Lesné et Clément, nous avons vu une toxicité du même ordre chez le rat : il en est de même pour le chien (Kreitmair).

8. Nos animaux en gestation ont bien supporté l'ergostérol irradié. En particulier deux rattes, recevant quotidiennement 5^{mg} du produit irradié 6 heures, ont mené à bien gestation et allaitement : les petits étaient normaux et ont vécu. Ces jeunes rats ont, après le sevrage, été soumis à un régime rachitigène et ont résisté au rachitisme, alors que des témoins, dans les mêmes conditions, montraient les lésions du rachitisme expérimental. La quantité de facteur D accumulé pendant l'allaitement les a donc protégés contre toute carence ultérieure.

9. Le cholestérol irradié 6 heures ne donne naissance qu'à de très faibles quantités de produits amorphes et est dépourvu de toxicité.

10. Le peroxyde d'ergostérol, irradié, s'est montré dépourvu de toute propriété antirachitique sur le rat et de tout pouvoir toxique sur le lapin.

11. Les faits observés chez nos animaux, et la résistance propre de chaque espèce à l'action toxique de l'ergostérol irradié, interdisent toute idée d'assimilation et de comparaison relativement à l'homme et à l'enfant : et cela d'autant plus que les doses employées dans nos expériences étaient 100 à 1000 fois supérieures à celles qui sont utilisées dans la thérapeutique infantile.

([1]) Simonnet et Tanret, *C. R. Soc. Biol.*, 100, 1929, p. 548.

CHIMIE PHYSIOLOGIQUE. — *Phénomènes d'oxydo-réduction observés au cours du développement de quelques champignons.* Note de M. F. **Labrousse** et M^lle **S. Philippon**, présentée par M. L. Mangin.

Par l'emploi de la technique exposée dans une Note précédente [1], nous avons étudié les propriétés oxydo-réductrices de quelques champignons, en utilisant comme indicateurs le bleu de méthylène, le bleu de crésyl et le gaïacol.

Nos recherches ont porté sur les espèces suivantes : *Armillaria mellea*, *Pleurotus olearius*, *Stereum necator*, *Schizophyllum commune*, *Polyporus fulvus*, *Fusarium vasinfectum*, *Fusarium tracheiphilum*, *Fusarium eumartii*, *Botrytis cinerea* et *Vermicularia varians*.

Entre le quarantième et le soixantième jour de culture, nous avons pu faire les constatations suivantes :

1° *Armillaria mellea*, *Pleurotus olearius*, *Stereum necator*, *Polyporus fulvus* et *Botrytis cinerea* oxydent le gaïacol en développant, dans les milieux de culture additionnés de cet indicateur, une coloration brun rouge plus ou moins intense, généralement localisée à la région où le mycélium se développe, parfois diffusée jusqu'à une certaine distance de la surface. *Aucune modification de teinte, autre que la superposition des pigments sécrétés par certains de ces champignons à la teinte propre des indicateurs, ne se manifeste au cours du développement de ces champignons en présence du bleu de crésyl et du bleu de méthylène.*

2° *Schizophyllum commune*, *Fusarium vasinfectum*, *Fusarium tracheiphilum*, *Fusarium eumartii* et *Vermicularia varians* décolorent totalement les milieux additionnés de bleu de crésyl, et partiellement ceux additionnés de bleu de méthylène. *Aucune modification de teinte, autre que la couleur propre des pigments élaborés par certains de ces champignons, ne se manifeste au cours de leur développement en présence de gaïacol.*

Ces constatations s'accordent logiquement avec les conditions dans lesquelles se réalisent les phénomènes d'oxydo-réduction des indicateurs que

(1) Labrousse et J. Sarejanni, *Changements de réaction et phénomènes d'oxydo-réduction observés au cours du développement de quelques champignons* (*Comptes rendus*, **189**, 1929, p. 805).

nous avons utilisés. En effet, l'oxydation du gaïacol, qui demeure normalement sous sa forme réduite en présence d'air, implique pour cette substance un potentiel d'oxydo-réduction supérieur à celui de l'eau, c'est-à-dire à + 1,23 volt (Nerk).

Par ailleurs, la réduction du bleu de crésyl et du bleu de méthylène, qui demeurent normalement sous leur forme oxydée en présence d'air, implique pour ces substances un potentiel d'oxydo-réduction inférieur à celui de l'eau. D'ailleurs, Aubel, Aubertin et Genevois [1] ont précisé que ces potentiels, mesurés à pH = 7,5, sont respectivement de + 0,033 volt et — 0,005 volt. Donc, d'après ces données, il est évident *a priori* qu'il ne peut y avoir *simultanément* oxydation du gaïacol et réduction du bleu de crésyl et du bleu de méthylène par un même champignon, puisque ces faits correspondraient à l'établissement dans le milieu de culture, d'un potentiel d'oxydo-réduction, à la fois supérieur à + 1,23 volt et inférieur ou égal à + 0,033 ou — 0,005 volt.

Les faits que nous rapportons viennent confirmer les conclusions auxquelles nous sommes arrivés dans notre précédente Note, à savoir que, en ce qui concerne les champignons que nous avons étudiés jusqu'ici, *les propriétés oxydantes ou réductrices qu'ils manifestent en présence d'indicateurs convenables, sont exclusives les unes des autres.*

CHIMIE PHYSIOLOGIQUE. — *Sucre protéidique et mannose chez les mammifères et les oiseaux.* Note de M. **H. Bierry**, présentée par M. A. Desgrez.

Il est possible de doser et d'obtenir le *sucre protéidique* à partir des protéides du plasma sanguin. Pour cela il est nécessaire d'isoler les albumines, et d'en opérer le clivage.

J'ai déjà indiqué les résultats que l'on obtient, soit par le clivage avec les acides, soit par le clivage avec les alcalis dilués, à l'autoclave à 120°. En particulier, si l'on chauffe, avec des acides minéraux étendus, les protides

(1) E. Aubel, E. Aubertin et L. Genevois, *Sur le potentiel d'oxydo-réduction de la levure, des anaérobies facultatifs, des anaérobies stricts et des milieux où vivent ces organismes* (*Ann. Physiol. et Physico-chimie*, 5, 1929, p. 1-10).

plasmatiques (cheval) isolés et purifiés (méthode de Bierry et Vivario), on met en liberté du *d*-mannose. Je suis d'accord, sur ce point, avec Z. Dische qui s'est contenté d'hydrolyser, après l'avoir soumis à la dialyse, du plasma de cheval. Si ces mêmes protides sont soumis, non plus à l'action des acides, mais à l'action préalable des alcalis dilués, on ne libère pas directement du mannose, mais un polyholoside non réducteur, qui donne du mannose par hydrolyse acide (1).

Le mannose a été tout d'abord caractérisé par son hydrazone. Cette hydrazone, après cristallisation dans l'alcool à 60°, présentait le même point de fusion (fusion instantanée au bloc Maquenne) et le même pouvoir rotatoire que l'hydrazone isolée à partir du mannose pur; portée au bain-marie bouillant avec de l'acétate de phénylhydrazine, elle donnait de la glucosazone typique. Enfin le mannose, régénéré de son hydrazone par la méthode d'Herzfeld, a pu être obtenu, en petite quantité, à l'état cristallisé.

Le mannose entre donc dans la constitution du groupement prosthétique hydrocarboné des protides plasmatiques (sucre protéidique) du cheval, mais il n'est pas le seul glucide constituant. J'ai déjà eu l'occasion d'insister sur ce point (2); j'aurai à y revenir.

Comme le sucre protéidique se trouve constamment dans le sang total et le plasma des divers animaux, j'ai voulu vérifier tout d'abord si le groupement prosthétique hydrocarboné des protides d'animaux, d'espèces variées, renfermait du mannose.

Une première série d'expériences a montré la présence d'un polyholoside, générateur du mannose, dans les protéides plasmatiques de différents Mammifères (cheval, chien, âne, mulet) et d'Oiseaux (poule). Le mannose peut être facilement dosé si l'on a soin de peser la mannosehydrazone recueillie, lavée et séchée avec les précautions d'usage.

Le mannose, dont la présence n'a guère été signalée jusqu'ici que chez les végétaux, se rencontre donc chez les différents animaux. L'alibilité de cet hexose, dans l'organisme animal a, du reste, été démontrée par un grand nombre de travaux, en particulier, ceux de Cremer, de P. Portier et ceux de Herring, Irvine et Mc. Leod. Les crises et l'hypoglycémie concomitantes à l'injection d'insuline rétrocèdent sous l'action de quelques rares glucides.

---

(1) H. Bierry, *C. R. Soc. Biol.*, **99**, 1928, p. 1839.
(2) H. Bierry, *C. R. Soc. Biol.*, **101**, 1929, p. 544 et 1066.

Des résultats entièrement positifs ne sont obtenus qu'avec le glucose et son épimère : le mannose, dont les effets se montrent pratiquement égaux.

La présence constante, dans les protides plasmatiques, d'un polysaccharide, générateur de mannose, incite à faire un rapprochement entre le métabolisme des animaux supérieurs et celui de la levure. La levure, cultivée dans des solutions concentrées de saccharose, emmagasine en même temps que du glycogène un corps générateur de mannose (une sorte de mannane). Pendant la période de multiplication cellulaire, le taux de cette mannane diminue en même temps que celui du glycogène. Dès lors, on peut se demander si la présence simultanée de plusieurs glucides n'est pas nécessaire au fonctionnement des organismes, ou si elle ne marque que des étapes dans le cycle d'évolution d'un même glucide.

La séance est levée à 16h.

E. P.

ERRATA.

(Séance du 2 septembre 1929.)

Note de M. *A. Kovanko*, Sur une classe de fonctions presque périodiques qui engendre les classes de fonctions p. p. de W. Stepanoff, H. Weyl et Bezicovitch :

Page 394, ligne 7, *au lieu de*

$$\left|\overline{\mathfrak{M}}_E\{[f(x)]^k\}\right| > \varepsilon \quad \text{et} \quad \left|\overline{\mathfrak{M}}_E\{[P_{n_\varepsilon}(x)]^k\}\right| < \varepsilon,$$

lire

$$\overline{\mathfrak{M}}_E\{|f(x)|^k\} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \overline{\mathfrak{M}}_E\{|P_{n_\varepsilon}(x)|^k\} < \varepsilon.$$

(Séance du 2 décembre 1929.)

Note de M. *L. Ravier*, Sur une formule générale pour le calcul de la poussée des terres :

Page 975, figure 1, la perpendiculaire en tirets sur OB en x doit être remplacée par un arc de cercle de centre O passant par le point de contact de la tangente menée du point O à la demi-circonférence de diamètre aB.

(Séance du 13 janvier 1930.)

Allocution de M. *Léon Lecornu* au sujet de la mort de M. Auguste Rateau :

Page 89, lignes 21 et 23, *au lieu de* Turbomoteurs, *lire* Turbomachines (comprenant les turbomoteurs et les turbogénérateurs).

Note de M. *Marcel Brelot*, Sur le problème de Dirichlet extérieur pour l'équation $\Delta u = c(x, y)\, u(x, y)\ (c > 0)$.

Page 101, dernière ligne, *au lieu de* $\int\int_S$, *lire* $\int\int_{\mathcal{E}}$.

Page 103, ligne 12, *au lieu de* régulière, *lire* harmonique.

(Séance du 20 janvier 1930.)

Note de M. *Victor Henri*, Chaleur de dissociation de la molécule d'oxygène et énergie d'activation de l'atome d'oxygène :

Page 179, ligne 7, *au lieu de* 11,5 volts, *lire* 7,1 volts.
Page 180, ligne 5, *au lieu de* $O^2 \rightarrow O + O - 136\,000^{cal}$, *lire* $O^2 \rightarrow O + O - 128\,000^{cal}$.